

THÈSES

présentées

À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE D'INGÉNIEUR DOCTEUR

par

Francis FER,
Ingénieur au Corps des Mines

1^{re} THÈSE : **LES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS D'ONDE
ET LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION**

2^e THÈSE : **PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ**

Soutenues le 16 mai 1956 devant la Commission d'Examen

MM. L. de BROGLIE..... *Président*

G. DARMOIS.....
A. LICHNEROWICZ. } *Examineurs*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550221_0037

THÈSES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE D'INGENIEUR DOCTEUR

par

Francis FER,
Ingénieur au Corps des Mines

**1ère THESE - LES SOLUTIONS SINGULIERES DES EQUATIONS D'ONDE
ET LA THEORIE DE LA DOUBLE SOLUTION.**

2ème THESE - PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE.

Soutenues le 16 mai 1956 devant la Commission d'Examen.

MM. L. de BROGLIE.....	}	<i>Président</i>
G. DARMOIS.....		<i>Examineurs</i>
A. LICHNEROWICZ		

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

Doyen..... J. PERES

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure	AUDUBERT.....	T Electrochimie
E. DARMOIS.....	T Enseignement de Physique	L'HERITIER.....	T Génétique
R. LEVY.....	T Physiologie comparée	GRIVET.....	T Radioélectricité
FOCH.....	T Mécanique physique et Exper.	PONCIN.....	T Mécanique des fluides
PAUTHENIER.....	T Electrotechnique générale	THIRY.....	T Mécanique appliquée
DE BROGLIE.....	T Théories physiques	DUBREIL.....	T Arith. et théor. des nomb.
JOB.....	T Chimie générale	QUELET.....	T Chimie organique
PRENANT.....	T Anatomie et Histol. comparées	CAGNIARD.....	T Géophysique appliquée
GARNIER.....	T Géométrie supérieure	CHAMPETIER.....	T Chimie macromoléculaire
PERES.....	T Mécanique des fluides et appl.	CUVILLIER.....	T Géol. Struct. et Géol. appliquée
LAUGIER.....	T Physiologie générale	JUNG.....	T Pétrographie
M. CURIE.....	T Physique (P.C.B.)	TRILLAT.....	T Chimie physique
BARRABE.....	T Géol. struct. et Géologie appl.	WIEMANN.....	T Chimie (M.P.C.)
G. DARMOIS.....	T Calc. des prob. et Phys. Math.	JACQUINOT.....	T Spectroscopie et physique céleste
J. BOUCCART.....	T Géogr. Phys. et Géol. dynam.	VASSY.....	Physique de l'atmosphère
Mme JOLIOT.....	T Physique nucléaire et Radioactivité	DESTOUCHES.....	Théories physiques
PLANTEFOL.....	T Botanique	M. PRUVOST.....	T Géologie
CABANNES.....	T Recherches physiques	AMIEL.....	T Chimie (P.C.B.)
GRASSE.....	T Evol. des êtres organisés	HOCART.....	T Minéralogie
PREVOST.....	T Chimie organique	J. P. MATHIEU.....	T Physique (P.C.B.)
BOULIGAND.....	T Application de l'analyse à la Géométrie	COUTEAUX.....	T Biologie animale (P.C.B.) Biologie animale (R.C.B.)
CHAUDRON.....	T Chimie appliquée	MAY.....	T Calc. diff. & Intégral
WYART.....	T Minéralogie	CHOQUET.....	Biologie (P.C.B.)
TEISSIER.....	T Zoologie	FELDMANN.....	T Physique (P.C.B.)
MANGENOT.....	T Biologie végétale	GUINIER.....	T Biologie (P.C.B.)
P. AUGER.....	T Physique quantique et Relat.	JOST.....	T Calc. des probabilités
MONNIER.....	T Physiologie des fonctions	FORTET.....	T Méth. Math. de la Physique
PIVETEAU.....	T Géologie	SCHWARTZ.....	T Physiologie végétale
ROCARD.....	T Physique (E.N.S.)	CHOUARD.....	T Aviation
H. CARTAN.....	T Mathématiques (E.N.S.)	MALAVARD.....	T Calcul différentiel
LAFFITTE.....	T Chimie générale	BRELOT.....	T Chimie (P.C.B.)
FAVARD.....	T Mécanique générale	NORMANT.....	T Chimie (P.C.B.)
COULOMB.....	T Physique du Globe	BENARD.....	Chimie (P.C.B.)
Melle COUSIN.....	T Biologie animale (P.C.B.)	BUVAT.....	Botanique (E.N.S.)
CHRETIEN.....	T Chimie minérale	DUGUE.....	T Statistiques mathématiques
P. DRACH.....	T Zoologie	GELOSO.....	Chimie (S.P.C.N.)
KASTLER.....	T Physique	SOULAIRAC.....	T Psychophysiologie
EPHRUSSI.....	T Génétique	ULRICH.....	T Physiologie végétale
WURMSER.....	T Biol. Physico-chimique	MARECHAL.....	T Optique théorique et appl.
RIVIERE.....	T Géologie (S.P.C.N.)	KIRRMANN.....	T Théories chimiques
GAUTHERET.....	T Biologie végétale (P.C.B.)	CHADEFAUD.....	Botanique
LUCAS.....	T Physique	DESTRIAU.....	Physique (M.P.C.)
A. THOMAS.....	T Biologie cellulaire	Mle LE BRETON.....	Physiologie générale
ARNULF.....	T Optique appliquée	SALEM.....	Mathématiques générales
M. MORAND.....	T Physique	ESCLANGON.....	T Physique (P.C.B.)
SOLEILLET.....	T Physique	LELONG.....	T Mathématiques générales
FORTIER.....	T Méc. anal. et Méc. céleste	DEVILLERS.....	Anatomie et Histologie comparées
DANJON.....	T Astronomie	EHRESMANN.....	Topologie Algébrique
FROMAGEOT.....	T Chimie biologique	FRANCON.....	Physique (M.P.C.)
LAPORTE.....	T Phys. génér. et radioact.	GLANGEAUD.....	Géographie physique et Géologie dynamique
JANET.....	T Méc. anal. et Méc. céleste	GODEMENT.....	Mathématiques (M.P.C.)
PETIT.....	T Biologie maritime	PISOT.....	Calcul des Probabilités
QUENEY.....	T Météor. et dyn. atmosphér.	ROCH (E.).....	Géologie
GALLIEN.....	T Embryologie	SCHATZMANN.....	Astrophysique
EICHORN.....	T Biologie Vég. (P.C.B.)	TERMIER.....	Paléontologie
DE CUGNAC.....	T Biologie Vég. (P.C.B.)	ZAMANSKY.....	stratigraphique Mathématiques générales
Melle CAUCHOIS.....	T Chimie Physique		
THELLIER.....	T Physique du Globe		

Secrétaire..... C. MONIER

A Monsieur Louis de Broglie
sans qui l'école déterministe de physique théorique
n'existerait pas en France

A ma femme

A la mémoire de mon camarade et ami
Robert Latouade, Ingénieur au Corps des Mines,
mort pour la France le 26 mars 1945 à Saint-Hauleu

AVERTISSEMENT

Pour faciliter la lecture de ce travail, les idées conductrices et les résultats essentiels de chaque chapitre (l'Introduction, comme son nom l'indique, mise à part) sont rassemblés en un sommaire ; les démonstrations sont, dans chaque chapitre, rassemblées à la suite du sommaire, en reprenant les mêmes titres d'articles et le même numérotage.

Le sommaire est imprimé en plus gros caractères, les démonstrations en caractères plus fins.

INTRODUCTION

La nature est un temple où de vivants piliers
Laissent parfois sortir de confuses paroles ;
L'homme y passe à travers des forêts de symboles
Qui l'observent avec des regards familiers.
Baudelaire. - Les Fleurs du Mal.

Pour la seconde fois depuis sa naissance, la Mécanique ondulatoire se trouve en face du redoutable problème du choix : problème commun à tous les êtres en voie de croissance. On connaît les termes de l'alternative : ou bien renoncer à tout jamais à décrire et à prévoir le processus d'évolution d'un corpuscule, la seule prévision possible étant statistique, et affirmer que ce renoncement est dans la nature elle-même, ou bien croire au contraire à l'existence de ces corpuscules autrement que comme lettres grecques, à l'existence de leurs lois, et à la possibilité de pénétrer sans cesse plus avant dans la connaissance de ces lois.

Le premier point de vue déclare avoir pour lui une suite nombreuse de succès ; mais on a pu en dire autant de Napoléon pendant quinze ans, et surtout les réussites de la théorie dite orthodoxe dans le domaine statistique ne prouvent rien contre les phénomènes sous-jacents, "cachés", qu'elle s'est rigoureusement interdit d'envisager. Le second point de vue s'appuie sur la progression des connaissances scientifiques depuis les âges les plus reculés de l'humanité ; l'échec de la première tentative déterministe, en 1927, n'est qu'un petit incident dans cette progression.

C'est à ce deuxième point de vue que nous nous placerons ici.

Nous n'en discuterons pas davantage les fondements philosophiques, bien que cette discussion ne manque pas d'intérêt : tout physicien (et même tout homme, pour peu qu'il pense) philosophe comme M. Jourdain faisait de la prose, et refuser de prendre conscience de cette réalité n'est pas la meilleure manière de se débarrasser d'une mauvaise philosophie. Mais le but de ce travail est essentiellement scientifique, et, tenant pour acquis une fois pour toutes que la matière a ses lois qui se sont exercées bien avant la venue de l'homme sapiens, on cherchera seulement dans cette introduction à préciser le chemin qui conduit des idées générales au développement mathématique.

o
o o

Le problème fondamental de la Mécanique ondulatoire, en tant que synthèse théorique cohérente, a été et reste celui de l'association de l'onde et du corpuscule. Je dis bien : en tant que synthèse cohérente. Les mérites de la Mécanique ondulatoire, comme instrument de découverte, soit lorsqu'elle généralise à tous les corpuscules la notion d'onde associée, soit lorsqu'elle justifie le postulat quantique par la notion des valeurs propres, ne sont plus à démontrer. Mais, si elle s'arrête à ce stade, la mécanique ondulatoire laisse substituer sans l'expliquer la juxtaposition, admise jusqu'à elle comme un fait

brut, de l'onde et du corpuscule. Pour qu'il y ait synthèse, il est nécessaire que l'on puisse, dans un corps de doctrine unique, embrasser à la fois le corpuscule et l'onde, et comprendre la liaison organique - on pourrait presque dire : biologique - qui unit l'un à l'autre.

C'était bien là d'ailleurs une des idées essentielles du fondateur de la mécanique ondulatoire : une fois découvert le principe général de l'association physique de l'onde et du corpuscule, comprendre le mécanisme de cette association et trouver le schéma mathématique qui en soit la traduction. On sait que M.L. de Broglie commença d'orienter la mécanique ondulatoire en ce sens, en formulant la théorie de la double solution et en posant les équations du guidage. Mais la justification complète et le développement de ces équations sont une oeuvre mathématique de longue haleine, qui fut prématurément interrompue par le péremptoire "non possumus" de la théorie probabiliste.

Pour cette dernière, le problème que nous venons de poser n'a pas de signification. Prisonnière volontaire du dogme des observables, elle commence par rejeter de la théorie physique toute grandeur qui n'est pas directement, instantanément et exactement mesurable, et se détourne avec horreur des paramètres "cachés". Prenant alors appui sur les relations d'incertitude, d'après lesquelles le mouvement d'un corpuscule n'est pas accessible dans ces conditions de jalouse précision, la théorie probabiliste élimine de son champ d'activité ce mouvement lui-même : position, vitesse, trajectoire. Dès lors l'association onde-corpuscule est effectivement un mot vide de sens, et la théorie physique n'est plus qu'une écorce d'observables à l'intérieur de laquelle un monde inaccessible et soumis aux seules lois du hasard s'agit mystérieusement. Comme cependant, dans bon nombre de circonstances, la présence du corpuscule vient démentir de façon éclatante le peu de foi qu'on a en lui, il faut remplacer l'association onde-corpuscule par le concept de complémentarité, et substituer à la synthèse espérée une sorte de dieu Janus dont on ne sait jamais quelle face de sa nature il va nous montrer.

Il est certain qu'une théorie basée sur les seules observables peut, en microphysique comme partout ailleurs, avoir son intérêt dans la mesure où elle permet de tirer le maximum de conséquences du minimum d'hypothèses : l'énergétique, par exemple, l'a bien montré. Il est possible que, quelquefois, la physique se soit trouvée embarrassée pour avoir formulé trop tôt des hypothèses trop précises sur les mouvements sous-jacents à l'observation directe ; mais chaque fois la solution a été, non pas de s'interdire ces hypothèses, mais de les modifier jusqu'à satisfaction complète. Se limiter aux observables d'une époque, c'est abandonner la recherche d'observables nouvelles, c'est se condamner à la stérilité ; et il n'est pas difficile de trouver des théories scientifiques qui ont usé, avec le plus grand bonheur, des paramètres cachés : citons, pour rester dans la physique, l'élasticité, l'étude des phénomènes de haute température, et l'électrolyse. Dans tous ces cas on doit, si on veut observer directement le phénomène, "pratiquer sur lui une intervention qui le tue", selon les termes de Bohr ; mais, jusqu'à présent les physiciens ne se sont pas laissés arrêter par cet implacable coup du sort, et ils n'en continuent pas moins de raisonner sur les tensions internes d'un solide, les transformations allotropiques qui ne sont accessibles que par trempe, ou le champ électrique d'un électrolyte.

On ne voit pas pourquoi, sur ce point de méthode, la théorie quantique devrait se séparer de ses devancières. D'aucuns ont argué que la connaissance du mouvement des corpuscules est inutile à la compréhension du monde quantique. Quand bien même ce serait vrai aujourd'hui, il n'en résulterait pas que cela dût éternellement continuer. Mais c'est inexact, et cela l'a toujours été. Sans doute, pour retrouver théoriquement les lois quantitatives de l'effet photo-électrique, la longueur d'onde du photon suffit, sa trajectoire étant sans intérêt (du moins pour l'instant). Par contre les expériences de diffraction des électrons ou de la chambre de Wilson témoignent d'une localisation spatiale du corpuscule qui ne se laisse pas facilement escamoter.

Prenons l'expérience de la chambre de Wilson : on y voit à l'oeil nu des courbes dessinées par les molécules de vapeur d'eau condensées. Il est universellement admis que la condensation se fait sur les molécules (d'eau ou d'air, peu importe) ionisées par le passage des corpuscules ou de ce qui en tient lieu. Cette ionisation demande à son tour, en tant qu'effet incontestable de localisation spatiale, une explication. Il en existe deux.

Examinons d'abord celle de la théorie probabiliste, telle qu'elle a été exposée par W. Heisenberg dans "Les principes physiques de la théorie des quanta", sans avoir subi de retouche depuis lors, à ma connaissance. Le raisonnement est le suivant.

Supposons qu'on connaisse, à l'instant initial, la position $\bar{q}_0$ (moyenne pondérée de q_0) et l'impulsion (moyenne) $\bar{p}_0$ de la particule avec des "erreurs moyennes" Δq et Δp (on raisonne pour simplifier dans un espace à une dimension) ; on démontre qu'à l'instant t la distribution de probabilité de la coordonnée q est :

$$(1) \quad |S(q)|^2 = C t e^{\times} \exp \left[- \frac{(q - \bar{q}_0 - \frac{t}{\mu} \bar{p}_0)^2}{\Delta q^2 + (\frac{t}{\mu} \Delta p)^2} \right]$$

μ étant la masse de la particule.

De cette formule la théorie probabiliste tire les deux conclusions suivantes :

a/ la trajectoire du paquet de probabilités, abstraction faite de son élargissement, est une ligne droite, tant qu'il n'y a pas perturbation (ionisation) ;

b/ dès qu'il y a perturbation, le paquet (1) est transformé en un "mélange" (Gemeenge) de paquets analogues. Si l'ionisation est accompagnée d'une détermination de position, on extrait de ce mélange un paquet plus petit, dont l'expression analytique s'obtient en faisant $t = 0$ dans (1) et en remplaçant $\bar{q}_0$ et $\bar{p}_0$ par les nouvelles valeurs moyennes $\bar{q}_1$ et $\bar{p}_1$ de q et p , paquet qui représente le résultat de la mesure. Ce paquet constitue le point de départ d'une nouvelle trajectoire, et ainsi de suite.

Ce raisonnement (qui reproduit à peu de chose près le texte de l'ouvrage précité) est loin d'être aussi convaincant qu'il le paraît. Il n'est que de l'examiner de près.

On remarque en effet en premier lieu, sur l'expression (1), que le point qui suit une ligne droite est le point où la densité de probabilité $|S(q)|^2$ est maximum. De deux choses l'une alors : ou bien on admet qu'à chaque instant un être physique ressemblant à un grain de matière occupe une région déterminée du paquet de probabilités, cette région devant être le plus fréquemment celle du maximum de $S(q)$, et que c'est le choc de ce grain de matière avec les molécules qui provoque l'ionisation : on a dans ce cas une explication du type le plus classique qui soit. Ou bien au contraire on pense que l'hypothèse précédente n'a pas de signification, et qu'on ne peut parler de localisation du corpuscule qu'après l'ionisation ; et dans ces conditions c'est le passage du maximum de probabilité qui provoque l'ionisation ; on arrive ainsi à faire dépendre un phénomène physique de cette notion purement comptable et immatérielle qu'est la probabilité : le nombre n'est plus la connaissance que nous avons des phénomènes physiques, il est leur cause même.

Assurément c'est le droit le moins contestable, pour l'interprétation probabiliste, de se déclarer indifférente à la cause de l'ionisation, et de se borner seulement à constater cette ionisation et à la localiser statistiquement. Certains trouveront sans doute ce principe d'insouciance des causes dangereux pour la connaissance ; mais là n'est pas la question pour l'instant. Ce qu'il importe de remarquer ici, c'est que, même si on a rejeté la notion de cause physique, le seul fait d'énoncer : "il y a ionisation où passe le maximum de densité de probabilités" introduit à nouveau une relation de causalité. Tout le changement réside dans le vocabulaire, mais il n'apparaît pas clairement que le remplacement du mot "corpuscule" par l'expression "maximum de densité de probabilités" soit d'un bénéfice quelconque.

Admettons toutefois ce langage nouveau ; nous allons voir que les difficultés physiques n'en sont pas levées pour autant.

L'écart-type de $|S(q)|^2$, $\sqrt{\Delta q^2 + (\frac{h}{p} \Delta p)^2}$ croît avec t , ce qu'on exprime en disant que le paquet de probabilités s'élargit dans le temps. Un calcul rapide montre que, pour des particules β se déplaçant à la vitesse de 290.000 Km/sec., et si l'on tient compte de l'augmentation relativiste de la masse ainsi que de la relation $\Delta q \cdot \Delta p = h/2\pi$, l'écart-type, qui était initialement Δq , est, après un parcours de 10 cm dans la chambre, de $\Delta q_f = \sqrt{\Delta q^2 + (10^{-10}/\Delta q)^2}$ cm. Cet écart-type final varie considérablement avec l'écart-type initial Δq . Si on prend pour ce dernier 10^{-8} cm ou davantage, Δq_f a sensiblement la même valeur. Mais rien, ni dans les relations d'incertitude ni dans les dispositifs idéaux d'expériences imaginés par Heisenberg, ne nous interdit de prendre Δq plus petit, quitte à consentir une incertitude initiale sur p relativement grande, ce qui est sans importance. En prenant $\Delta q = 10^{-11}$ cm, ce qui est encore largement supérieur au diamètre supposé de l'électron, on a $\Delta q_f = 10$ cm ; pour $\Delta q = 10^{-13}$ cm, on aurait $\Delta q_f = 10$ m. Avec des chiffres de cet ordre, on ne peut plus expliquer, par la simple probabilité, le déplacement rectiligne d'un élément de volume centré initialement sur $\bar{q}_0$. Or les trajets des rayons β rapides sont sensiblement rectilignes. Un paquet tel que $S(q)$ supposé permanent ne pourrait expliquer cette propriété.

Il est donc obligatoire, pour tenter d'obtenir l'accord avec l'expérience, de supposer que, dans $S(q)$, t ne peut pas être égal au temps du trajet total effectué par le corpuscule ; il faut que t soit le temps de libre parcours entre deux collisions successives ; d'où la réduction du paquet de probabilités. Comme cette réduction n'est qu'une application immédiate du postulat de la mesure de la mécanique quantique (la mesure sélectionne un "état pur" dans un mélange), la justification de ce postulat, en théorie probabiliste, réside dans la nécessité de corriger une indétermination théorique trop grande pour l'expérience. Il n'en va pas de même si, comme l'ont fait Bohm et Vigier (i), on cherche à fonder la théorie de la mesure sur l'analyse, dans un schéma déterministe, de la perturbation apportée par l'appareil de mesure au phénomène à mesurer.

Admettons encore la réduction. A chaque collision l'observateur repère (sur la plaque photographique) la position de la particule avec une nouvelle "erreur moyenne", qu'il introduit dans le second membre de (1) à la place de celle qui avait grandi avec t . Nous verrons plus loin combien cette notion d'erreur moyenne est équivoque. Mais laissons-lui pour l'instant l'acception que lui donne la théorie probabiliste : la valeur de cette erreur ne peut pas être inférieure au diamètre ρ des gouttelettes d'eau condensées sur les molécules ionisées, puisque c'est précisément à l'aide de ces gouttelettes qu'on observe le phénomène. Si le trajet total comporte n collisions, l'écart-type final, d'après les lois de composition des probabilités, est $\rho \sqrt{n}$. Pour des rayons α , pour lesquels n est de l'ordre de 10^5 , et en prenant $\rho = 10^{-3}$ cm, ce qui serait déjà très précis, on aura $\rho \sqrt{n} = 0,3$ cm. 16% environ des particules α auront un écart supérieur à cet écart-type, qu'on peut considérer comme un maximum. Autrement dit, ici encore, on ne peut pas expliquer les trajectoires rectilignes.

De quelque manière qu'on s'y prenne, l'expression (1) ne peut rendre compte de l'expérience. On notera en outre que cette expression n'est valable, ainsi qu'il ressort de la démonstration d'Heisenberg, que si le produit $\Delta q \cdot \Delta p$ est minimum et égal à $h/2\pi$. Il n'y a aucune raison de croire que, dans la chambre de Wilson, la relation d'incertitude comporte ce degré de certitude, de sorte que, dans l'hypothèse contraire, il n'y aurait plus de loi de probabilités $S(q)$ et partant plus de loi $S(q)$ du tout.

L'explication probabiliste menant à toutes sortes de difficultés, il semble bien qu'il ne reste qu'une hypothèse : celle d'une trajectoire réelle du corpuscule. C'est là une idée à laquelle tout le monde aurait pu se rallier depuis longtemps, si le point de vue "naïf" n'avait pas été accablé d'autant de sarcasmes. On demandera sans doute ce que signifie la "réalité" de cette trajectoire de particule, l'objection fondamentale de la théorie probabiliste étant que cette réalité n'est accessible que pendant la mesure. Mais comme il en est de même de tous les phénomènes de la nature, dont la réalité ne peut se constater que par l'observation, nous attribuerons à cette trajectoire la même réalité qu'à celle d'un obus dont, en règle générale, il est difficile d'observer autre chose que le point de départ et le point de chute.

Cela ne signifie pas pour autant que la trajectoire en question soit parabolique, ni puisse se calculer par la balistique classique, ni que les trajectoires

intra-atomiques soient d'un type analogue à celui des chambres de Wilson. Elles le seraient que d'ailleurs le physicien ne s'en plaindrait pas, tant les choses simples lui sont agréables. Mais on conviendra que ce qui se passe dans la chambre de Wilson, et qu'il vaut mieux, après tout, essayer d'expliquer par les raisonnements les moins torturés, n'est pas décourageant pour généraliser la notion de trajectoires au domaine intra-atomique. Bien au contraire.

Partons donc de l'hypothèse des trajectoires corpusculaires. Il reste, sur le plan théorique, à les relier à l'aspect ondulatoire. A cet égard les deux problèmes qui se posent sont les suivants : primo, est-il possible de décrire mathématiquement l'association de l'onde et du corpuscule ? secundo, la théorie mathématique ainsi faite ira-t-elle au devant de l'expérience et sera-t-elle confirmée par elle ?

Quant à la seconde partie, c'est le secret de l'avenir. Il faut un peu de patience avant de la percer : on nous accordera sans doute qu'il n'est pas possible de vérifier une théorie avant de l'avoir édifiée, a fortiori de prévoir par elle des phénomènes encore inconnus. C'est faire beaucoup d'honneur à l'interprétation causale (qu'on ferait mieux d'ailleurs d'appeler interprétation normale) de la mécanique ondulatoire que d'exiger d'elle qu'elle fournisse sur-le-champ la synthèse théorique et expérimentale que beaucoup ont affirmée impossible pendant un quart de siècle. Il est fort vraisemblable que si, dans ce délai assez long, le monument théorique avait été construit, on serait en mesure aujourd'hui de répondre à la seconde question.

Nous nous bornerons donc ici à la première. On a dit aussi d'elle qu'elle était impossible à résoudre. Il est vrai qu'elle est difficile, mathématiquement parlant, bien que l'armature en ait été dessinée, dès 1927, par M. L. de Broglie. On verra, au cours de ce travail, que bien des problèmes d'analyse restent en suspens. Cependant des difficultés déclarées insurmontables ou difficilement surmontables, telles que la régularité de la phase dans une solution à amplitude singulière (ii), apparaissent maintenant en bonne voie de résolution (voir chap. IV). Il est de même satisfaisant de constater que, pour expliquer l'expérience des "interférences par quantas isolés" (iii), on n'a nul besoin de faire appel à la complémentarité, pourtant considérée comme indispensable par le "Kopenhagener Geist der Quantentheorie" ; on verra en effet, dans ce chapitre IV, que les mêmes conditions aux limites qui impriment à une onde son allure interférentielle imposent au corpuscule, considéré comme singularité de cette onde, de se placer sur les directions classiques d'émergence.

o
o o

Pour que, mathématiquement, on puisse discerner un corpuscule au sein d'une onde, il faut que la fonction d'onde $u(xyzt)$ présente à chaque instant dans une région de l'espace petite, voire ponctuelle, une particularité importante qui différencie cette région de tout le reste de l'espace, et la rende ainsi susceptible de représenter le corpuscule. L'idée la plus naturelle, compte tenu de tout ce qu'on sait par ailleurs sur la signification de la phase de l'onde, est d'attribuer cette particularité à l'amplitude, et, plus précisément, de définir la région

corpusculaire comme étant celle où l'amplitude a des valeurs notablement plus grandes que partout ailleurs ; en d'autres termes cette amplitude doit avoir une "bosse", en poussant à l'extrême une valeur infinie en un point. On se trouve ainsi en présence de deux possibilités pour représenter le corpuscule lié à l'onde : une représentation continue par une fonction "à bosse", et une représentation par une fonction dotée d'une singularité. Comme on le verra par la suite (chap. III, in fine), ces deux représentations ne sont pas fondamentalement dissemblables, une singularité du type pôle pouvant être considérée comme un cas limite d'une fonction "en aiguille".

La première tentative - et la seule jusqu'à présent - faite pour mettre en oeuvre l'idée de l'onde continue à bosse a été la construction du paquet d'ondes : une onde possédant une amplitude à bosse est formée par la superposition d'un groupe d'ondes monochromatiques ayant un spectre continu. L'analyse mathématique montre que, à un instant donné, toute onde de ce type peut se mettre sous la forme d'une intégrale de Fourier ; mais, ainsi que les physiciens s'en sont rapidement aperçu à l'expérience, le calcul montre que la valeur de cette intégrale tend vers zéro dans tout l'espace quand le temps tend vers l'infini : le paquet d'ondes s'évanouit.

Une raison physique aurait dû faire écarter d'emblée l'intégrale de Fourier : c'est que les différentes ondes monochromatiques qui la composent sont indépendantes les unes des autres. En introduisant ce mode de représentation, on attribue de même coup à chacune des composantes de l'être complexe qu'on veut représenter une liberté qui peut n'être pas justifiée ; la structure du corpuscule disparaît au profit d'une somme sans cohésion aucune. Il n'est pas étonnant qu'un être aussi désagrégé puisse jouir de la liberté que lui assigne Bohr (iv). En outre l'emploi de l'intégrale de Fourier n'est intéressant que si l'équation d'onde est linéaire, ce qui permet de faire vérifier l'équation d'onde par chaque composante monochromatique ; cette particularité disparaîtrait automatiquement avec la linéarité de l'équation.

Sur le plan mathématique d'autre part, il était facile de prévoir le destin malheureux du paquet d'ondes. C'est en effet un théorème classique de l'analyse que l'intégrale de Fourier :

$$(2) \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, pourvu que la fonction $f(\nu)$ soit continue, ou continue presque partout.

On sait donc, avant que de l'essayer dans un problème de physique théorique, qu'un paquet d'ondes tel que celui qu'on emploie dans le cas d'une superposition d'ondes planes, n'a qu'une amplitude éphémère. Il est par ailleurs facile de reconnaître que le temps d'existence du paquet d'ondes, pour infini qu'il soit théoriquement, est pratiquement de l'ordre de grandeur de la période principale du paquet. En effet l'évanouissement de l'intégrale (2) repose sur le fait que pour une valeur T suffisamment grande du temps, la période $\Delta\nu = 1/T$

de $e^{2\pi i \nu t}$ est petite par rapport au module de continuité de $f(\nu)$, autrement dit sur le fait que $f(\nu)$ reste pratiquement constante dans un intervalle où $e^{2\pi i \nu t}$ décrit un grand nombre de fois sa sinusoïde. Si donc, dans un rayonnement quelconque, $f(\nu)$ est nul en dehors d'une certaine bande de fréquences, c'est par rapport à la fréquence moyenne de la bande que se juge la grandeur de T , et, pour toutes les ondes de courte longueur, lumière, électrons, etc..., le temps de vie du paquet est encore infiniment petit pour tous nos moyens d'observations.

On pourrait se demander si, le paquet d'ondes superposées en fréquences étant inadmissible pour représenter un corpuscule dans le temps, il ne reste pas permis, en superposant des ondes ayant des directions de propagation différentes, de construire un paquet d'ondes à bosse localisée, bosse qui ne disparaisse pas au cours du temps. La réponse est négative si l'onde liée au corpuscule obéit à une équation d'onde.

Raisonnons pour fixer les idées sur l'équation du photon. A un instant donné t , on peut représenter une fonction quelconque $\Psi(\mathbf{xyz}t)$ par une intégrale de Fourier :

$$\Psi(\mathbf{xyz}t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(uvw) e^{i(\mathbf{ux} + \mathbf{vy} + \mathbf{wz})} du dv dw$$

pourvu simplement que Ψ s'annule à l'infini de l'espace à cet instant. Une onde à amplitude en bosse pourra donc être représentée par une intégrale de cette forme.

Mais, si Ψ vérifie l'équation $\square\Psi = 0$, la fonction F devra obéir à l'équation :

$$(u^2 + v^2 + w^2)F + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

qu'on peut obtenir formellement en dérivant sous le signe $\int$, et dont on peut montrer la pleine validité en intégrant $\square\Psi \cdot \exp(-i(\mathbf{ux} + \mathbf{vy} + \mathbf{wz}))$.

La solution de cette équation s'écrit :

$$A(uvw) e^{-ict\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + B(uvw) e^{ict\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

$$\text{Posons : } \sqrt{u^2+v^2+w^2} = 2\pi\nu/c \quad \alpha = \frac{cu}{2\pi\nu} \quad \beta = \frac{cv}{2\pi\nu} \quad \gamma = \frac{cw}{2\pi\nu}$$

ce qui revient à faire apparaître les cosinus directeurs des propagations d'ondes planes définies par le vecteur $\alpha\beta\gamma$ et leurs fréquences ν ; l'élément de volume $du dv dw$ se transforme en $\frac{\nu^2}{c^3} d\Omega d\nu$, $d\Omega$ étant l'angle solide décrit par la variation élémentaire du vecteur $\alpha\beta\gamma$. On arrive ainsi à la formule classique du rayonnement :

$$(3) \quad \Psi(xyzt) = \frac{8\pi^3}{c^3} \int d\Omega \int_0^\infty v^2 dv \left[A(v, \alpha \beta \gamma) \cdot e^{2\pi i v \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - ct}{c}} + B(v, \alpha \beta \gamma) \cdot e^{2\pi i v \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z + ct}{c}} \right]$$

dans laquelle se trouve une intégration en $e^{2\pi i v t} dt$ qui fait tendre Ψ vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Bien entendu ce résultat élémentaire d'analyse mathématique suppose, comme nous l'avons vu, que la densité spectrale $f(v)$ est une fonction continue (ou continue presque partout) de la fréquence. On sait que la conclusion qu'une intégrale de Fourier telle que (2) s'annule pour $t = \pm \infty$ n'est plus valable si la densité spectrale possède des discontinuités plus profondes. Ainsi si, dans (2), on prend pour $f(v)$ la fonction de Dirac $\delta(v - v_0)$, la fonction $\varphi(t)$ est égale à $e^{2\pi i v_0 t}$, qui ne s'annule évidemment pas pour $t = \pm \infty$. On pourrait alors songer à former des paquets d'ondes pour lesquels la densité spectrale serait une fonction dotée de discontinuités convenables. Mais un tel moyen, en admettant qu'il réussisse et s'il peut donner quelque apaisement sur le plan mathématique, remet totalement en question la structure physique du paquet d'ondes, qui cesse d'avoir un spectre continu, c'est-à-dire cesse pratiquement d'être un paquet d'ondes.

Une intégrale de Fourier, quelle que soit la manière dont elle a été formée, ne peut donc pas représenter une bosse permanente.

Cette conclusion ne condamne pas totalement son emploi. La décomposition d'une onde qui s'annule à l'infini de l'espace en une somme d'ondes monochromatiques à spectre continu est possible, à un instant donné, d'ailleurs quelconque. Il est seulement interdit de faire varier t dans l'équation (3); pour avoir la décomposition à un instant ultérieur, il faudra recommencer le calcul des densités spectrales A et B , dont on constatera que la forme analytique a changé. Ce phénomène est tout à fait analogue au suivant: une fonction non périodique ne peut pas être développée en série de Fourier dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, bien qu'elle puisse l'être dans n'importe quel intervalle fini.

La propriété mathématique de l'étalement du paquet d'ondes à spectre continu n'a pas peu contribué à ancrer l'idée que le corpuscule était physiquement soumis au même processus de dilution; de la proposition: "le paquet d'ondes s'évanouit", on a conclu, un peu hâtivement, à la proposition: "le corpuscule n'est pas localisé". Ce passage de l'une à l'autre est particulièrement frappant dans l'une des deux démonstrations théoriques que W. Heisenberg a donné des relations d'incertitude.

Nous allons revenir sur ces relations dans un instant, mais finissons-en avec le Wellenpaket. De la brève étude qui précède, il ressort la seule

conclusion que voici : le corpuscule, s'il existe en tant qu'associé à l'onde, ne peut pas être représenté par une intégrale de Fourier. Conclusion, comme l'on voit, de portée physique limitée. Pour aller au delà, et tenir pour certaine l'inexistence du corpuscule, il eût fallu faire la preuve que cette intégrale était la seule représentation possible de l'onde corpusculaire, et cette démonstration est encore à faire. Il ne fallait donc pas ériger l'ignorance où l'on était de la représentation du corpuscule en preuve de l'inexistence de ce dernier, pas plus qu'on ne peut considérer le fait d'être illettré comme une raison valable d'incendier la bibliothèque.

Une remarque s'impose encore, qui va nous entraîner pour un instant en dehors de la mécanique ondulatoire : la propriété de l'intégrale de Fourier, de s'annuler pour $t = \pm \infty$, est valable pour tout rayonnement électromagnétique. On arrive ainsi à la conclusion qu'un rayonnement permanent ou quasi-permanent ne peut avoir de spectre que discontinu, autrement dit que la permanence d'un rayonnement entraîne sa quantification ; le spectre continu n'appartient qu'aux rayonnements amortis. Ce point semble être passé inaperçu lors des études sur le rayonnement, en particulier sur le rayonnement thermique ; il pourrait être utile d'y revenir.

L'affirmation qui précède peut sembler paradoxale : comment peut-on tirer une conclusion physique (par exemple le fait que le corps noir donne, à une analyse suffisamment dispersive, un spectre discontinu) d'une propriété purement mathématique ? La réponse est bien simple : la théorie mathématique ne fait que refléter, en termes symboliques, une réalité qui lui est antérieure. Il faut inverser la séquence : ce n'est pas parce que l'intégrale de Fourier s'annule à l'infini qu'un rayonnement permanent a un spectre discontinu ; c'est parce que les composantes d'un spectre continu finissent par se détruire mutuellement au bout d'un certain temps que l'intégrale de Fourier s'annule à l'infini. La seule précaution à prendre en l'occurrence est de s'assurer au préalable de l'existence du spectre : question d'expérience. Ce spectre existe bien pour les rayonnements, et la conclusion précédente est valable ; il n'est nullement prouvé qu'un corpuscule ne soit rien d'autre qu'un spectre, et la conclusion n'a plus d'intérêt.

L'impossibilité de représenter théoriquement un corpuscule par un paquet d'ondes doit nous conduire à réviser l'utilisation que W. Heisenberg a faite de ce dernier pour fonder une des preuves des relations d'incertitude. Rappelons le principe de sa démonstration : d'une part la largeur pratique de la bande spectrale qui définit le paquet d'ondes est d'autant plus grande que le paquet est plus petit ; d'autre part à chaque longueur d'onde du paquet correspond une valeur de la vitesse de groupe, et par suite l'incertitude sur cette vitesse est proportionnelle à la largeur de la bande spectrale. On en déduit qu'on ne peut préciser la localisation du paquet d'ondes (c'est-à-dire diminuer son diamètre) sans augmenter du même coup la gamme de ses vitesses et inversement ; et on montre facilement que cette influence mutuelle est caractérisée par la constante h .

Une telle démonstration, correcte en tout point d'ailleurs, repose sur le fait que telle propriété de l'objet à examiner (le paquet d'ondes) n'est pas

caractérisée par une grandeur unique, mais par un ensemble de grandeurs variant dans un certain intervalle. Que l'on puisse définir plus étroitement l'intervalle qui caractérise la position au détriment de celui qui caractérise la vitesse, est pour l'instant secondaire ; l'essentiel est de constater ce qu'on pourrait être tenté d'appeler le défaut de définition de l'objet. Mais il faut tout de suite remarquer que ce défaut tient, non pas à l'objet lui-même, mais à la représentation que nous nous en donnons. Si, pour prendre un autre exemple, nous nous proposons de mesurer la longueur d'une règle avec des instruments de mesure de plus en plus précis, un moment viendra où nous pourrions constater que la règle n'a pas de longueur définie. Tout le monde conviendra, dans ce cas, que ce n'est pas la règle qu'il faut accuser d'inconstance, mais l'image que nous nous en faisons de schématisation. Le problème est le même pour l'électron ; si ce dernier a une étendue et une structure, prétendre définir cette étendue par un point et cette structure par un vecteur vitesse est une erreur, qui mènera fatalement à des incertitudes ; mais ces incertitudes seront à imputer à notre théorie, ainsi qu'à l'insuffisance de nos appareils de mesure, non à la nature des choses. Nous pourrions cependant garder l'expression "défaut de définition" de l'objet, en remarquant qu'elle signifie que nous prenons pour étalon nos possibilités actuelles de représentation théorique et d'étude expérimentale.

La question se pose maintenant de savoir si ce défaut, qui est incontestablement inhérent au paquet d'ondes, l'est ou non au corpuscule. Dans l'affirmative, le corpuscule vérifierait alors la relation $\Delta q . \Delta p \geq h$, Δq et Δp étant la variation de la coordonnée p q dans le domaine corpusculaire ; la relation $\Delta q . \Delta p \geq h$ résulterait des propriétés intrinsèques du corpuscule. Mais il n'est nullement évident qu'on doive répondre à la question posée par l'affirmative ; aucun argument physique ne le recommande, et, sur le plan théorique, la construction d'une image mathématique telle que la singularité, qui est définie en position et en vitesse sans flou aucun, est parfaitement possible. Cela revient à dire que la relation d'incertitude démontrée pour le paquet d'ondes ne l'est pas pour le corpuscule.

Il est intéressant, à plus d'un titre, de comparer cette démonstration des relations d'incertitude avec diverses autres, en premier lieu avec celle qui repose sur la comparaison des écarts quadratiques moyens de la position et de l'impulsion (démonstration souvent exposée dans la mécanique des opérateurs). Le raisonnement consiste à utiliser les amplitudes de probabilités $S(q)$ et $S(p)$, reliées entre elles par l'équation : $S(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int \exp \frac{2\pi i}{h} p q \times S(q) dq$. De cette relation on déduit aisément que le minimum du produit $\Delta q . \Delta p$ est $h/2\pi$, et qu'il est atteint lorsque $S(q)$ est une densité de probabilité de Gauss dont $\sqrt{2} . \Delta q$ est l'écart-type, $S(p)$ étant alors également une fonction de Gauss dont l'écart-type est $\sqrt{2} . \Delta p$.

On peut sans doute être frappé par le fait qu'on retrouve, au second membre de la relation d'incertitude, la constante h qui y était apparue dans la première démonstration. Mais cette coïncidence ne doit pas nous masquer le fait que le Δq et le Δp qui s'introduisent dans la seconde démonstration sont radicalement différents du Δq et du Δp qui s'étaient introduits dans

la première. Il est d'une importance primordiale de mettre en lumière et de caractériser cette différence. Elle est double.

Les indéterminations qui apparaissent dans la première démonstration sont dues, comme nous l'avons vu, à un "défaut de définition" de l'objet. Celles qui apparaissent dans la seconde proviennent de ce qu'on pourrait appeler un "défaut de définition" du phénomène attaché à cet objet : d'une expérience à une autre l'ensemble des propriétés de l'objet ne se retrouvent pas identiques à l'instant de l'observation, mais variables dans un certain domaine où leur valeur est régie par une loi de probabilités. Or ces deux sortes d'indéterminations sont totalement indépendantes l'une de l'autre, et la preuve en est en ce qu'on peut les faire varier indépendamment. On peut en effet concevoir que l'objet devienne rigoureusement défini, ponctuel par exemple, sans que son état final (son état à l'instant de la mesure) cesse d'obéir à une loi de probabilité, et inversement.

Recourons encore à une comparaison, dont on peut espérer qu'elle ne paraîtra pas trop "naïve", celle du tir au canon. Les coups envoyés sur un objectif se répartissent, en longueur par exemple, autour de cet objectif avec une probabilité donnée par la loi de Gauss ; par ailleurs l'impact de chaque coup est loin d'être ponctuel. On se rend compte sans difficulté que la grosseur du trou d'obus (le défaut de définition de l'objet), qui dépend du calibre, n'a rien à voir avec la dispersion des différents coups, qui dépend de la précision du tube et de la reproductibilité de la poudre.

Le fait que les deux causes d'incertitude puissent coexister, voire se recouvrir au point de devenir indiscernables en première analyse, n'autorise pas à les confondre, encore moins à étendre à l'une de ces causes une loi qui serait valable pour l'autre.

Il y a une deuxième différence entre les deux sortes d'indéterminations. L'usage de la notion de probabilité suppose essentiellement la possibilité, au moins théorique, de réaliser un grand nombre d'expériences sur le même objet (ou un petit nombre d'expériences portant chacune sur un grand nombre d'objets identiques) ; la notion de probabilité est inséparable de la notion de collection et ne peut se concevoir sans elle. Au contraire le défaut de définition de l'objet est une caractéristique strictement individuelle. Rien, a priori, n'autorise à dire que le comportement statistique d'un ensemble est du à la variabilité de la constitution des individus qui le composent. Ce peut être vrai, mais encore faut-il le prouver. Or c'est en cela que réside un des postulats implicites de la théorie probabiliste, de poser que l'indétermination, d'une expérience à une autre, de la position d'un électron, est due à la dilution de cet électron dans l'espace. Rien n'est moins sûr.

Il existe, on le sait, d'autres démonstrations des relations d'incertitude, basées sur la critique d'expériences. Prenons celle du microscope, expérience d'ailleurs idéale, ce qui est assez illogique pour une théorie qui ne veut s'en tenir qu'aux observables. On peut voir sans difficulté dans ce cas que les incertitudes Δq et Δp sont dues, partiellement à l'imprécision de l'instrument de mesure (pouvoir séparateur du microscope), partiellement à la

perturbation apportée par la mesure au phénomène à mesurer (effet Compton du photon sur l'électron). Or, si la seconde cause d'incertitude s'apparente à celles qui peuvent être admises dans la détermination de l'état de la particule par une loi de probabilité, il n'en est pas de même de la première, qui est d'une nature étrangère aux deux premières causes examinées ci-dessus. L'incertitude provient ici de "l'imperfection" de l'appareil de mesure, et non du phénomène observé. Cette imperfection est-elle d'ailleurs rédhitoire, et ne peut-on espérer posséder un jour un instrument dont le pouvoir séparateur serait meilleur que celui du microscope ? Rien n'interdit cet espoir.

On voit en définitive, en ce qui concerne le premier membre des relations d'incertitude, que la généralité qu'on attribue à ces relations est due à la confusion des contenus divers et irréductibles l'un à l'autre que l'on met dans ce premier membre.

L'examen du second membre mène à une conclusion parallèle. A première vue, on peut trouver troublante la constance de ce second membre, toujours égal à h quelle qu'en soit l'origine. Il faut cependant noter que cette constance a été quelque peu sollicitée. h figure bien dans le second membre, mais multiplié par un facteur qui est, tantôt 1 (microscope, paquet d'ondes), tantôt $1/2\pi$ (probabilités), tantôt $1/\alpha^2$, α étant un angle "assez petit" (déviations des électrons dans un champ magnétique) ; ce facteur devient même égal à n , nombre quantique qu'on aimerait bien retrouver dans les autres démonstrations, pour les électrons liés, et l'incertitude est due alors au fait qu'on assimile les dimensions de l'électron à celles de sa trajectoire ! La diversité de ces facteurs est assez grande pour que l'espoir de trouver un jour un second membre égal, par exemple, à $h \cdot 10^{-3}$, n'apparaisse pas comme utopique. De toutes façons, cette diversité est telle qu'on peut seulement attribuer à la présence de h au second membre la simple signification qu'on se trouve en face de phénomènes quantiques.

Les relations d'incertitude sont donc loin d'avoir la portée générale et absolue qu'on a voulu leur reconnaître. De ce qui précède il ressort qu'il faut en rejeter la signification qui dérive de l'insuffisance de nos représentations théoriques, ou de l'imprécision de nos appareils de mesure : ce sont là choses auxquelles on peut remédier, il est tout au moins permis d'essayer.

Il ne subsiste plus alors que la signification purement statistique : la trajectoire d'une particule, observée au cours d'expériences multiples, a un point et une vitesse d'impact variables au cours de ces expériences ; les écarts quadratiques moyens Δq et Δp donnés par la statistique obéissent à la relation $\Delta q \cdot \Delta p \geq h/2\pi$. L'existence d'écarts quadratiques non nuls peut être, jusqu'à preuve du contraire, attribuée à l'influence simultanée de l'appareil de mesure et de l'appareil de création des particules, c'est-à-dire à l'influence de conditions aux limites fluctuantes sur la trajectoire : le guidage de la particule est soumis aux aléas de la situation macroscopique qui l'entoure. Cela n'a rien que de très normal, et on peut remarquer qu'il n'en résulte aucun empêchement pour la prévision, puisqu'il est encore possible d'observer une des coordonnées avec précision. Pourquoi l'observateur serait-il saisi de désespoir à l'idée de ne pouvoir mesurer simultanément position et vitesse ?

On s'est fort bien, jusqu'à présent, accommodé de semblables situations (en balistique, précisément). Ce n'est de toutes manières qu'en essayant d'en tirer le meilleur parti possible qu'on peut arriver à les améliorer.

o
o o

Revenons à l'association onde-corpuscule. M. L. de Broglie a proposé (v) de représenter mathématiquement une onde-corpuscule par une fonction d'onde dotée d'une singularité ponctuelle du type pôle, et il a donné des exemples de telles singularités pour l'équation $\square u - k^2 u = 0$. On connaît d'autre part les remarquables propriétés des solutions singulières de la Relativité généralisée, mises en évidence par M. G. Darmon (vi) et Einstein (vii). Il est tentant, de rechercher des solutions singulières pour des équations d'onde quelconques, en commençant par les équations scalaires.

Une difficulté peut sembler devoir se présenter. Les équations de la Relativité ne sont pas linéaires, alors que les équations de la Mécanique ondulatoire le sont. Or l'échec du paquet d'ondes dans la représentation d'un corpuscule permanent a fait naître la conviction qu'il était impossible, pour une équation linéaire, de trouver des solutions "en bosse" de ces équations, susceptibles par un passage à la limite de fournir des solutions singulières, et d'ailleurs déjà aptes elles-mêmes à représenter des particules.

Il est facile de se rendre compte qu'il s'agit là d'un préjugé sans fondement. Prenons le cas de l'équation à deux dimensions $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. On sait que sa solution générale (en laissant de côté les solutions avancées) est une fonction arbitraire $F(x - ct)$. En prenant pour F la fonction de Gauss, $\exp(-\frac{(x - ct)^2}{a})$, on obtient une solution qui, de toute évidence, possède une bosse qui se déplace en restant identique à elle-même. Il est vrai qu'elle se déplace avec la vitesse imposée c ; mais c'est là un inconvénient auquel nous pourrions remédier.

Si, le négligeant pour un instant, nous cherchons des solutions analogues pour l'équation $\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ dans l'espace-temps habituel, on pensera à la solution du potentiel retardé $u = \frac{F(r - ct)}{r}$; une telle solution possède une singularité permanente à l'origine A , supposée fixe pour l'instant, du rayon vecteur $\vec{r}$ qui va de A à $M(xyz)$; si on prend encore pour F une fonction de Gauss, ou plus généralement toute fonction en cloche ayant un maximum pour la valeur zéro de l'argument, u possèdera un maximum sur toute la surface de la sphère $r = ct$. Telle quelle, cette solution ne peut convenir, mais rien n'empêche de déplacer le point A : la singularité se déplacera avec lui, avec telle vitesse que l'on voudra. L'inconvénient signalé ci-dessus disparaît, mais il en surgit un autre: dans la dérivation de u s'introduisent des termes provenant du déplacement de A . Pour les faire à nouveau disparaître, il suffit d'intégrer le long de la courbe de déplacement de A ; on arrive ainsi à l'expression:

$$u = \int_{\theta_0}^{\tau} \frac{\mathbf{F}[c(t-\theta) - r]}{r} d\theta$$

où $a^i(\theta)$ sont les coordonnées du point variable A qui décrit une courbe C en fonction du paramètre θ , θ_0 une limite fixe et τ une limite variable que nous définirons plus loin.

Il apparaît immédiatement qu'une telle fonction possède une singularité (cas limite de la fonction en bosse) permanente qui s'arrête au point $A(\tau)$; on peut d'ores et déjà prévoir qu'en choisissant convenablement la fonction F on pourra limiter cette singularité à une portion de la courbe C .

Le dalembertien de u s'obtiendra, d'une part en dérivant sous le signe $\int$, ce qui donne un résultat nul, d'autre part en dérivant par rapport à la borne supérieure τ de l'intégrale; pour que ces derniers termes soient nuls et qu'il s'ensuive $\square u = 0$, il suffit de choisir F telle que $F[c(t-\tau) - r(\tau)] = F[c(t-\tau) - r(\tau)] = 0$.

On obtiendra facilement cette dernière condition en choisissant convenablement la valeur de τ . Il est indiqué de définir τ par la condition: $c(t-\tau) - r(\tau) = 0$. En effet, de par la forme même de $\frac{F}{r}$, qui est un potentiel retardé, u apparaît comme la somme de signaux émis à chaque instant θ par le point $A(\theta)$, et se composant entre eux au point M à l'instant t . Le point de vue relativiste oblige à ne considérer que les signaux qui ont pu arriver en M à l'instant t , c'est-à-dire ceux qui ont été émis aux instants θ tels que $c(t-\theta) - r(\theta) \geq 0$. Nous retrouverons mathématiquement cette obligation en recherchant la forme générale des solutions singulières des équations d'onde, recherche où intervient le cône caractéristique d'espace-temps issu du point M, t , le "cornet acoustique" avec lequel le point M, t recueille toutes les données antérieures de l'onde; le formalisme mathématique ne fait d'ailleurs qu'exprimer la réalité physique.

On arrive ainsi à la définition du potentiel de ligne, qu'il ne reste plus qu'à élargir aux équations d'onde autres que $\square u = 0$; ce sera l'objet des chapitres I, II et III.

Les solutions à singularité mobile qui viennent d'être définies présentent cet avantage que la singularité demeure quel que soit le temps; nous verrons à ce sujet comment se comporte la partie principale de la fonction u au voisinage de la singularité (chap. IV).

Les solutions qui viennent d'être définies assurent la représentation du corpuscule par un infini mathématique; la traduction de la réalité physique n'est donc pas tout à fait exacte: on ne peut admettre en effet qu'un phénomène physique présente quelque part une grandeur non mesurable puisqu'infinie. La représentation du corpuscule par un point singulier polaire ne peut donc être qu'approchée.

Pour nous rendre compte des limites de validité de cette approximation, nous aurons recours à une analogie, celle du potentiel newtonien. Si on

considère une sphère (macroscopique) portant une densité superficielle homogène, le potentiel créé par cette sphère à son extérieur est le même que si toute la masse électrique était concentrée ponctuellement au centre de la sphère ; à l'intérieur le potentiel réel est constant, tandis que le potentiel fictif de la masse ponctuelle reste en $1/r$, avec une singularité au centre de la sphère. Un observateur ne percevra aucune différence entre le potentiel réel, mesurable, et le potentiel fictif, singulier, tant que cet observateur reste extérieur à la sphère, c'est-à-dire tant qu'il ne s'approche pas de la singularité en deçà d'un certain rayon.

La représentation d'un corpuscule par un point singulier attaché à une onde est soumis à la même restriction : elle n'est valable que pour les propriétés observées au delà d'une certaine distance de la singularité. En deçà interviendra la structure du corpuscule, que l'on ne pourra plus considérer comme ponctuel, et il faudra, dans le petit domaine ainsi délimité, remplacer la fonction singulière par une fonction régulière, peut-être changer l'équation qui gouverne cette fonction.

Dans toutes les circonstances où, au contraire, le diamètre apparent du corpuscule est négligeable, sa représentation par une singularité demeure théoriquement valable. C'est en particulier le cas de la définition des trajectoires considérées comme lignes infiniment minces : elles se placent, ainsi que l'avait prévu M.L. de Broglie, sur les lignes de guidage de la phase de l'onde (les démonstrations font l'objet du chapitre IV). Cette phase elle-même, comme on le verra au chapitre V, se met sous forme d'une intégrale analogue à l'intégrale d'action de la mécanique de Hamilton-Jacobi.

Il reste enfin à effectuer la jonction entre les solutions singulières représentatives d'un corpuscule et les solutions régulières habituelles de la mécanique ondulatoire ; cette jonction est nécessaire, d'une part en raison de la valeur physique incontestable des solutions régulières, d'autre part parce que la théorie de la double solution doit réaliser la synthèse du comportement individuel des corpuscules et de leur comportement collectif. Cette synthèse sera amorcée au chapitre V. Nous y verrons d'abord comment les lignes de guidage sont, sous certaines conditions, des lignes de raccord de deux solutions ; puis nous tenterons de déduire, d'une solution singulière à particules multiples, une fonction régulière image de cette solution singulière. Nous serons ainsi conduits à une équation non linéaire renfermant un terme de structure pour le corpuscule, et nous verrons que le raccord de la solution singulière et de la solution régulière de l'équation non linéaire entraîne que les singularités ont pour densité celle que détermine la statistique quantique habituelle de l'onde régulière.

o
o o

Tel est, brièvement résumé, le chemin mathématique de cette tentative d'association de l'onde et du corpuscule. Si elle ne résoud pas tous les problèmes posés, du moins pouvons-nous espérer qu'elle permet d'entrevoir quelques possibilités.

BIBLIOGRAPHIE

- i. - D. BOHM - Phys. Rev. - 1952, p. 166
J.P. VIGIER - Thèse. Paris, 1954
- ii. - W. PAULI , L. ROSENFELD, dans "Louis de Broglie, physicien et penseur.- Albin Michel, 1953
- iii. - C.G. DARWIN.- The new conceptions of the matter.- Londres, 1931
- iv. - N. BOHR.- La théorie atomique et la description des phénomènes.
- v. - L. de BROGLIE.- J. Phys. Rad. - 1927, p. 225 et "La physique quantique restera-t-elle indéterministe.- Gauthier-Villars, 1953
- vi. - G. DARMOIS.- Mémorial des Sciences mathématiques.- 1927
- vii. - EINSTEIN & GROMMER.- Sitz. Preuss. Akad. Wiss.- 1929, t.1

Chapitre I. - LES POTENTIELS DE LIGNE.

1. - GENERALITES.

Nous nous proposons de chercher des solutions à singularité mobile de l'équation (E) :

$$(E) \quad \square u + 2b^\sigma \frac{\partial u}{\partial x^\sigma} - k u = 0 \quad \sigma = 1 \text{ à } 4 \quad x^4 = t$$

équation dans laquelle $\square$ est le symbole d'Alembertien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, b^σ des coefficients complexes fonctions des variables d'espace-temps x^σ et de la forme $\beta^\sigma + i\gamma^\sigma$, k une fonction réelle des x^σ , négative dans les équations usuelles de la mécanique ondulatoire.

Nous définirons dans ce but une expression analytique susceptible de posséder une singularité mobile sur une trajectoire choisie arbitrairement : ce sera le potentiel de ligne.

Après avoir établi la régularité de ce potentiel en dehors de la trajectoire, nous définirons les conditions qui doivent présider à sa construction pour que :

- a/ il satisfasse à l'équation (E) ;
- b/ sa zone de singularité soit limitée à chaque instant à un petit arc de courbe ou à un point de la trajectoire.

Comme on le sait (i), si on fait apparaître l'amplitude f et la phase φ de la solution complexe $u = f e^{i\varphi}$, l'équation (E) se décompose en deux équations :

$$(1) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + 2\gamma^\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + k = -\frac{\square f}{f}$$

$$(2) \quad 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \gamma^i\right) \frac{\partial f}{\partial x^i} + 2\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^4\right) \frac{\partial f}{\partial t} + f\left(\square \varphi + 2\beta^\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}\right) = 0$$

appelées respectivement équation de Hamilton-Jacobi et équation de continuité.

Conventions de notations.

Nous désignerons constamment par des lettres grecques les indices susceptibles de varier de 1 à 4, par des lettres latines minuscules les indices

susceptibles de varier de 1 à 3. Nous userons de la notation des indices muets pour toute sommation par rapport à ces indices.

Si L_u est invariant dans une transformation de Lorentz - ce que nous supposerons désormais - les b^σ apparaissent comme les composantes (complexes) contrevariantes d'un vecteur d'espace-temps ; la métrique d'espace-temps étant une métrique diagonale 1, 1, 1, $-c^2$, les composantes covariantes de ce vecteur sont :

$$b_i = b^i \quad b_4 = -c^2 b^4$$

Nous aurons des égalités analogues pour la partie réelle β^σ et la partie imaginaire γ^σ de b^σ .

2.- DEFINITION DU POTENTIEL DE LIGNE

On considère, dans l'espace à trois dimensions, un point mobile $A(\theta)$ qui décrit, en fonction du temps θ , une trajectoire C , θ variant de $-\infty$ à $+\infty$. Nous désignerons par a^i les coordonnées d'espace du point A , par

a^σ l'ensemble des quatre coordonnées a^i, θ , par $\vec{v}$ ($v^i = \frac{da^i}{d\theta}$) la vitesse du point A .

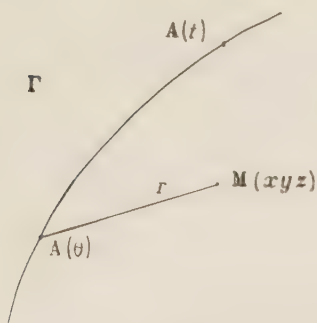


fig. 1

Nous supposerons essentiellement, sauf avis contraire, que la grandeur v de la vitesse est bornée supérieurement, quel que soit θ , par un nombre ϖ inférieur à c , vitesse de la lumière.

Soit $M(xyz$ ou $x^i)$ un point de l'espace, considéré à l'instant t , r la distance AM ; r est fonction de x^i d'une part, des coordonnées a^i de A , donc de θ , d'autre part. Nous désignerons par v_r la projection algébrique de $\vec{v}$ sur le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$

On considère la quantité ξ définie par :

$$\xi = c(t - \theta) - r$$

Il est facile de voir que, moyennant l'hypothèse faite : $v \leq \varpi < c$, pour M et t donnés, ξ est une fonction décroissante de θ qui s'annule toujours pour une valeur τ et une seule de θ , τ étant inférieur ou égal à t .

Pour $\theta < \tau$, ξ est donc une quantité positive. Bien entendu τ est une fonction de $x^\sigma (xyz t)$.

Nous désignerons par a^i les valeurs des coordonnées $a^i(\theta)$ pour $\theta = \tau$, par a^σ l'ensemble des quatre coordonnées a^i, τ ; nous désignerons par ρ la distance $r(\tau) = A_\tau M$, par v_ρ la projection de $\vec{v}(\tau)$ sur le rayon vecteur $A_\tau M$. Enfin nous appellerons Γ la partie de C décrite de $\theta = -\infty$ à $\theta = t$.

Si $\mu(x^\sigma; a^\sigma)$ est une fonction donnée, réelle ou complexe, des variables x^σ et a^σ , nous appellerons potentiel de ligne $u(x^\sigma)$ ou $u(M, t)$ relatif au point M pris à l'instant t et à la trajectoire C l'intégrale:

$$(3) \quad u(M, t) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu(x^\sigma; a^\sigma)}{r} d\theta \quad a^\sigma = a^i(\theta), \theta$$

Afin que cette intégrale ait un sens, de même que ses dérivées des deux premiers ordres, nous supposerons que :

a/ $\mu(x^\sigma; a^\sigma)$ et ses dérivées premières et secondes en x^σ sont des fonctions continues et bornées dans tout l'espace-temps, frontières comprises, de leurs arguments x^σ et a^σ , sauf peut-être pour $r = \sqrt{\Sigma (x^i - a^i)^2} = 0$

μ et ses dérivées peuvent dépendre de leurs arguments, soit directement, soit par l'intermédiaire de r ; dans ce dernier cas il faut remarquer que la régularité par rapport à r n'entraîne la régularité par rapport à xyz que si $r \neq 0$.

b/ l'intégrale $\int_{-\infty}^{\theta} |\mu(x^\sigma; a^\sigma)| d\theta$ est convergente quelle que soit la courbe C d'intégration.

Il faut noter que, dans toute la suite de ce travail, μ n'intervient que pour les arguments qui vérifient la relation $c(t-\theta) - r \geq 0$. D'autre part la limite inférieure de l'intégrale a été prise égale à $-\infty$. Il n'est pas nécessaire, pour la validité des résultats à venir, de donner cette valeur particulière à la borne inférieure; n'importe quelle valeur constante θ_0 conviendrait, à condition de prendre $\mu = 0$ pour toutes les valeurs négatives de $c(t-\theta) - r$. Dans ce cas il existerait un front d'onde en deçà duquel u est nulle, alors que, pour une borne inférieure égale à $-\infty$, ce front d'onde n'existe pas; mais physiquement l'existence de ce front d'onde n'a pas d'importance si θ_0 est suffisamment inférieur à t . Nous aurons à revenir sur cette question.

Nous dégagerons un peu plus loin la signification physique de μ .

3.- DERIVEES DE LA FONCTION $\tau(xyz t)$

La fonction $\tau(xyz t)$ définie par l'équation :

$$(4) \quad c(t - \tau) - \rho = 0 \quad \rho = A_\tau M$$

est continue et admet des dérivées du premier et du deuxième ordre en x^σ lorsque ρ est différent de zéro (et bien entendu lorsque $v \leq \varpi < c$, ce sur quoi nous ne reviendrons plus jusqu'à nouvel ordre).

Les dérivées premières de τ sont données par les expressions :

$$(5) \quad \frac{\partial \tau}{\partial x^i} = - \frac{x^i - \alpha^i}{\rho(c - v_\rho)} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{c}{c - v_\rho}$$

Ces quatre quantités sont les composantes covariantes d'un vecteur dont les composantes contre-variantes sont :

$$(6) \quad - \frac{x^\sigma - \alpha^\sigma}{\rho(c - v_\rho)}$$

On voit qu'il en résulte en particulier :

$$(7) \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 = 0$$

On a enfin :

$$(8) \quad \square \tau = - \frac{2}{\rho(c - v_\rho)}$$

4. - REGULARITE DE LA FONCTION u

Sous les hypothèses faites pour μ , la fonction u est une fonction régulière des x^σ (jusqu'aux dérivées secondes incluses) pourvu que M ne soit pas sur la partie de la trajectoire C antérieure à t^* (partie Γ).

La démonstration de ce théorème est immédiate. Si r n'est nul pour aucune valeur de θ , et en raison de l'absolue convergence de l'intégrale (3), on a le droit de dériver sous le signe $\int$. Les dérivées de u font en outre intervenir une dérivation par rapport à la borne supérieure de l'intégrale, dont le résultat a pour expression :

$$\frac{\mu(x^\sigma, \alpha^\sigma)}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma}$$

quantité parfaitement déterminée puisque ρ n'est pas nul.

La démonstration est identique pour l'obtention des dérivées secondes ; la continuité de ces dernières résulte de considérations analogues.

5. - CONDITIONS POUR QUE u VERIFIE L'EQUATION (E)

Pour que u vérifie l'équation d'onde (en dehors des points singuliers bien entendu), il suffit que μ obéisse aux deux conditions suivantes :

a/ $\frac{\mu(x^\sigma, a^\sigma)}{r}$ vérifie l'équation (E) prise par rapport aux x^σ :

$$\square \frac{\mu}{r} \equiv \square \frac{\mu}{r} + 2b^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\mu}{r} \right) - k \frac{\mu}{r} = 0$$

b/ pour tout couple de points (x^i, t) , (α^i, τ) vérifiant la relation (4) on a :

$$(9) \quad \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left(b^i \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} - cb^* \right) \mu = 0$$

condition qui peut aussi s'écrire sous forme covariante et après multiplication par $\rho = c(t - \tau)$:

$$(9bis) \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^\sigma} + b_\sigma \mu \right) (x^\sigma - \alpha^\sigma) = 0$$

6. - CALCUL DE LA PARTIE PRINCIPALE DE u AU VOISINAGE DE Γ .

Lorsque, à un instant donné t , le point M tend vers un point A de Γ , μ tend vers une valeur finie d'après les hypothèses faites ; si cette valeur n'est pas nulle, r tendant alors vers zéro, l'élément différentiel de l'intégrale u tend vers l'infini, et il en est de même, d'après les règles classiques de convergence des intégrales, de $u(M, t)$. La partie Γ de la courbe C est donc, à chaque instant t , le lieu possible des singularités de u . Mais il apparaît tout de suite, puisque pour $\mu = 0$ l'élément différentiel de l'intégrale (3) est indéterminé, que l'existence de la singularité de u en chaque point de Γ dépend de la valeur de μ en ce point ; de même l'existence d'une singularité des dérivées de u dépendra vraisemblablement de la valeur des dérivées de μ . Il est donc nécessaire de calculer la valeur des parties principales de u et de ses dérivées au voisinage de Γ . Nous nous bornerons pour l'instant à la partie principale de u .

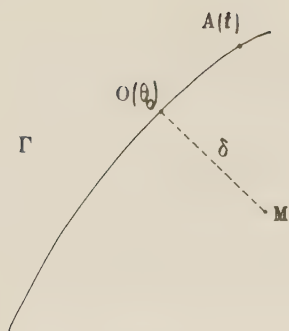


fig. 2

Abaissons de M , considéré à l'instant t , et voisin de la trajectoire C la perpendiculaire MO à cette courbe. Soit δ la distance MO , θ_0 le paramètre correspondant au point O .

L'étude détaillée amène à distinguer, pour des raisons physiquement sans importance, deux cas suivant que la trajectoire C passe une fois ou plusieurs (voire une infinité) au voisinage du point M . Pratiquement cette distinction sépare les trajectoires possibles en deux catégories : dans la première

figurent aussi bien les trajectoires qui viennent de l'infini de l'espace et y retournent, que celles qui, à distance finie, s'enroulent un nombre infini de fois autour d'un centre, en étant quasi-périodiques ; dans la seconde figurent les trajectoires périodiques, dont le support géométrique est une courbe fermée décrite un nombre infini de fois.

Ecartons pour l'instant les trajectoires périodiques. Lorsque δ tend vers zéro, θ_0 tend vers une valeur limite θ_1 . Les formules donnant la partie principale de u sont différentes suivant que θ_1 est inférieur ou égal à t .

Si θ_1 est inférieur à t , la partie principale de u est :

$$2 \frac{\mu [x^0; a'(\theta_0), \theta_0]}{v(\theta_0)} \log \frac{R}{\delta}$$

R étant une longueur constante dépendant des caractéristiques géométriques de C et qu'on garde ici simplement pour une raison d'homogénéité.

Si θ_1 est égal à t , la partie principale de u est, en général :

$$\frac{\mu [x^0; a'(t), t]}{v(t)} \log \frac{R}{\delta}$$

dans le cas particulier où M se trouve sur la tangente en $A(t)$ à C , cette expression doit être multipliée par un facteur numérique entier dont la valeur est sans importance.

Le complément de ces parties principales est une quantité finie quel que soit δ .

Dans le cas où la trajectoire est périodique de période T , la partie principale consiste en une série où sont sommés les termes correspondant aux valeurs θ_0 , $\theta_0 - T$, $\theta_0 - 2T$, etc... du paramètre θ . Nous allons

voir tout de suite que, physiquement, on est amené à supposer que tous les termes de cette série, hormis le premier, sont nuls.

7. - CONDITION A IMPOSER A μ POUR LOCALISER LA SINGULARITE

Les expressions qu'on vient de trouver donnent immédiatement cette condition. On peut en effet, dans toutes les parties principales, remplacer x^i , coordonnées de M, par $a^i(\theta_0)$; la différence $x^i - a^i(\theta_0)$ étant de l'ordre de δ , les parties principales ne sont pas modifiées. On voit alors que, pour tout point A (θ_0) où :

$$(10) \quad \mu \left[a^i(\theta_0), t; a^i(\theta_0), \theta_0 \right] = 0$$

la fonction u reste finie lorsque δ tend vers zéro. Elle devient infinie comme $\log \delta$ pour tout point A (θ_0) ne satisfaisant pas à cette condition.

Nous voyons donc apparaître la condition pour que, à chaque instant t , un petit arc seulement de la courbe Γ soit singulier. Si on définit cet arc par l'intervalle $(t - \frac{\chi}{c}, t)$ de θ , χ étant un nombre positif, fonction ou non de t , la condition nécessaire et suffisante pour que la singularité de u existe sur cet arc et sur cet arc seulement, est que l'équation (10) soit vérifiée pour $\theta < t - \frac{\chi}{c}$, et ne soit pas vérifiée pour $t - \frac{\chi}{c} \leq \theta \leq t$. Dans le cas où l'arc singulier est de longueur non nulle, nous dirons que la singularité est linéaire.

La singularité ponctuelle apparaît comme un cas particulier de la singularité linéaire, obtenue en faisant tendre la longueur de l'arc singulier vers zéro. Nous verrons au chapitre II comment réaliser ce passage à la limite.

Il nous faut remarquer que, pour l'instant, la réalisation de la condition (10) rend u simplement bornée. Rien ne nous assure qu'il en sera de même des dérivées de u , et nous verrons au chapitre IV qu'effectivement une condition supplémentaire doit être satisfaite pour que les dérivées partielles de u soient bornées sur l'arc de Γ où u l'est elle-même.

L'étendue de la singularité, qu'elle soit ponctuelle ou linéaire, représente approximativement, d'après les considérations de l'Introduction, la dimension de la particule. Nous avons ainsi une première signification physique de la fonction μ .

De cette interprétation de μ , il résulte immédiatement que la série correspondant à une trajectoire périodique et évoquée ci-dessus se réduit à son premier terme. En effet la longueur de la singularité est sensiblement égale à $\frac{v\chi}{c}$, v étant la vitesse d'un point moyen de l'arc singulier; pour une trajectoire périodique cette longueur doit, pour des raisons physiques évidentes, être petite devant la longueur de la trajectoire, c'est-à-dire devant vT ; χ/c étant petit devant T , il s'ensuit que si, pour t et θ_0 donnés, (10) n'est pas vérifiée, elle le sera pour t et $\theta_0 - T$, t et $\theta_0 - 2T$, etc...

La fonction μ a une deuxième signification physique, dont nous avons déjà parlé dans l'Introduction. μ/r est un potentiel retardé et u une somme de signaux élémentaires émis, aux points successifs de C , à des instants antérieurs à t et tels que le signal émis ait eu le temps de parvenir en M . La fonction μ/r joue donc le rôle d'une fonction de propagation d'une propriété de la particule. Ainsi, comme on le verra au chapitre IV, dans le cas de l'équation $\square u = 0$ on peut prendre comme solution la fonction $u = \frac{\omega(\tau)}{\rho(c-v_p)}$ où ω est une fonction arbitraire d'une variable représentant la fonction μ ; si on fait $\omega = e$ = charge de l'électron, on retrouve le potentiel bien connu de Liénard-Wiechert; la propriété propagée est ici la propriété électrostatique de la particule.

DEMONSTRATIONS

3 bis. - DERIVEES DE LA FONCTION τ

Partons de l'équation (4). Dans une variation $\delta M, \delta t$, τ varie de $\delta \tau$ donné par l'équation :

$$c(\delta t - \delta \tau) - \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} \delta x^i - \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} \frac{d\alpha^i}{d\tau} \delta \tau = 0$$

En remarquant que :

$$- \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} \frac{d\alpha^i}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} = -v_\rho$$

l'équation précédente nous donne bien les équations (5) pour les dérivées premières de τ . Pour $\rho \neq 0$ et $v \leq \omega < c$, les dérivées premières de τ sont donc bien définies et la continuité de τ en résulte immédiatement. On vérifie sans difficulté que ces dérivées satisfont à l'équation (7).

On peut ensuite, à partir des équations (5), calculer les dérivées **secondes** de τ , en tenant compte de ce que les dérivées premières sont, d'une part fonctions explicites des x^i , et d'autre part fonctions des x^σ par l'intermédiaire de α^i , ρ , v_ρ , donc de τ . Nous nous bornerons à calculer $\square \tau$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^i} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right) + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{x^i - \alpha^i}{\rho(c - v_\rho)} \right] - \frac{1}{c - v_\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x^i - \alpha^i}{\rho} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x^i} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{c - v_\rho} \right) (c - v_\rho) \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right)^2 \end{aligned}$$

et :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = c \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{c - v_\rho} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{c - v_\rho} \right) (c - v_\rho) \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2$$

On en déduit, en tenant compte de l'équation (7) et en posant, notation que nous utiliserons fréquemment par la suite : $D = \rho(c - v_\rho)$:

$$\begin{aligned} \square \tau &= - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{x^i - \alpha^i}{\rho(c - v_\rho)} \right] + \frac{1}{c - v_\rho} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x^i - \alpha^i}{\rho} \right) \frac{x^i - \alpha^i}{\rho(c - v_\rho)} \\ &= - \frac{3}{D} + \frac{x^i - \alpha^i}{D^2} \left[c \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} - v^i(\tau) \right] + \frac{1}{c - v_\rho} \left[- \frac{v^i(\tau)}{\rho} + \frac{x^i - \alpha^i}{\rho^2} v_\rho \right] \frac{x^i - \alpha^i}{D} = - \frac{2}{D} \end{aligned}$$

5 bis. - CONDITIONS POUR QUE u VERIFIE L'EQUATION (E)

Formons le dalembertien de l'intégrale (3). Chaque dérivée première se compose de deux termes, l'un provenant de la dérivation sous le signe $\int$, l'autre de la dérivation par rapport à la borne supérieure de l'intégrale. On a donc :

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial x^i} = \int_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x^i} - \frac{\mu}{r^2} \frac{x^i - \alpha^i}{r} \right) d\theta + \frac{\mu(x^\sigma, \alpha^\sigma)}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x^i}$$

$$(11bis) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial t} d\theta + \frac{\mu(x^\sigma, \alpha^\sigma)}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

Calculons maintenant les dérivées secondes. Les dérivations sous le signe $\int$ vont donner comme apport au dalembertien l'intégrale de $\square \frac{\mu}{r}$. Les dérivations par rapport à la borne supérieure vont donner comme apport :

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x^i} - \frac{\mu}{\rho^2} \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

soit :

$$(12) \quad \frac{1}{\rho^2(c - v_\rho)} \left[\mu - (x^i - \alpha^i) \frac{\partial \mu}{\partial x^i} - \frac{\rho}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right]$$

Les termes finis provenant des équations (11) et (11bis) doivent être dérivés totalement par rapport à x^σ , cette dérivation comprenant, comme dans le paragraphe précédent, la dérivation directe et la dérivation par l'intermédiaire de τ . L'apport des termes finis au dalembertien s'établit alors ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left[\Sigma \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 \right]$$

Le coefficient de la dérivée en $\frac{d}{d\tau}$ est nul d'après l'équation (7). L'expression précédente devient par conséquent :

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x^i} - \frac{\mu}{\rho^2} \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\mu}{\rho} \square \tau$$

ou enfin :

$$(13) \quad \frac{1}{\rho^2(c - v_\rho)} \left[\mu - (x^i - \alpha^i) \frac{\partial \mu}{\partial x^i} - \frac{\rho}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] - \frac{2\mu}{\rho^2(c - v_\rho)}$$

Nous avons en définitive, pour les termes du dalembertien hors de l'intégrale, par addition des quantités (12) et (13) :

$$- \frac{2}{\rho^2(c - v_\rho)} \left[(x^i - \alpha^i) \frac{\partial \mu}{\partial x^i} + \frac{\rho}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right]$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\mathcal{L}u$ à partir des relations (11) et (11bis) et en tenant compte de la valeur qu'on vient de trouver pour $\square u$. On remarque qu'on peut faire pénétrer les b^σ et k sous le signe $\int$ puisque ces fonctions sont indépendantes de la variable d'intégration θ , et on obtient :

$$\mathcal{L}u = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu}{r} d\theta - \frac{2}{\rho(c-v_p)} \left[\frac{x^i - a^i}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left(\frac{x^i - a^i}{\rho} b^i - c b^4 \right) \mu \right]$$

La condition suffisante énoncée au sommaire pour que l'équation $\mathcal{L}u = 0$ soit satisfaite est ainsi mise en évidence.

Nous pouvons tout de suite faire deux remarques. La première est que les conditions a et b de l'énoncé, si elles sont suffisantes, n'apparaissent nullement comme nécessaires, la seule condition nécessaire étant l'équation intégral-différentielle $\mathcal{L}u = 0$, où $\mathcal{L}u$ a la valeur donnée par l'équation précédente. L'étude d'une telle équation serait incontestablement plus compliquée que celle que nous ferons sur la base des conditions a et b, et paraîtrait devoir conduire à une solution μ dépendant de la forme de la trajectoire. Cette question sera d'ailleurs réglée, au chapitre III, par l'examen de la forme générale des singularités.

Le tout est de savoir si les conditions a et b, seulement suffisantes, donc plus restrictives que celles qui résulteraient d'une condition nécessaire et suffisante, seront encore assez larges pour permettre de déterminer une fonction μ . La réponse est d'autant moins évidente, et c'est en ceci que consiste la deuxième remarque, que les conditions a et b renferment les a^σ comme paramètres (sauf dans les équations à coefficients constants qu'on peut ramener à $\square u - ku = 0$, et où un changement de variables permet d'éliminer les a^σ des conditions a et b). Nous verrons néanmoins, au cours du chapitre suivant, qu'il est effectivement possible de trouver dans tous les cas une fonction μ répondant à ces deux conditions a et b, et en outre à la condition de localisation de la singularité.

6bis.- CALCUL DE LA PARTIE PRINCIPALE DE u AU VOISINAGE DE Γ

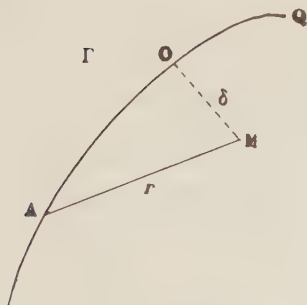


fig. 3

Reprenons la figure 2 du sommaire et soit à calculer la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu}{r} d\theta$ lorsque le point x^i est au voisinage de la courbe d'intégration (c'est-à-dire au voisinage d'un point de paramètre $\theta \leq \tau$). Le point $M(x^i)$ et le temps t étant supposés fixes, μ doit être considéré comme une fonction de la seule variable θ , que nous remplacerons ici par l'abscisse curviligne s mesurée à partir d'une origine donnée. Nous prendrons pour cette origine le point O , et pour sens des s croissants celui des θ croissants. Soit Q le point de la courbe correspondant au paramètre τ . Pour que l'intégrale (3) soit infiniment grande avec $1/\delta$, il faut évidemment que O se trouve, soit en amont de Q , soit en aval de Q mais dans son voisinage immédiat : c'est dans l'une ou l'autre de ces hypothèses que nous nous placerons.

Limitons-nous momentanément au cas des courbes qui ne passent qu'une fois au voisinage de M , écartant ainsi le cas des courbes périodiques ou quasi-périodiques que nous examinerons en fin de ce paragraphe. Avec cette restriction la partie de

Γ située au voisinage de O est la seule pour laquelle $MA = r$ devient infiniment petit.

Nous prendrons M pour origine des coordonnées α^i ; les quantités relatives à O seront affectées de l'indice zéro. Nous poserons :

$$\sigma^2 = s^2 + \delta^2 \qquad \qquad \sigma > 0$$

Nous désignerons par R le rayon de courbure au point courant de C , et nous supposerons que R est partout borné inférieurement par un nombre non nul $\mathfrak{R}$.

Nous désignerons par Γ_0 la partie de Γ définie par la condition $|\theta| \leq \mathfrak{R}/\sqrt{3}$, par Γ_1 le reste de Γ . Si s_1 et s_2 sont les abscisses de l'origine et de l'extrémité de Γ_0 , on a toujours : $s_1 = - \mathfrak{R}/\sqrt{3}$; par contre s_2 peut varier, suivant la position de O par rapport à Q , entre une quantité petite en valeur absolue et négative (si O n'est pas sur Γ) et $\mathfrak{R}/\sqrt{3}$. Nous poserons : $S = s_2 - s_1 \leq 2 \mathfrak{R}/\sqrt{3}$

Précisons d'autre part la régularité de μ par rapport à son argument s . On peut supposer - et les résultats du chapitre II montreront que c'est précisément dans cette hypothèse qu'il faut se placer - que μ dépend de s (ou de θ) directement d'une part, par l'intermédiaire de r d'autre part, Nous supposerons que μ est une fonction régulière de ces deux variables considérées comme indépendantes. Le calcul de dérivation composée montre aisément que, quand r est considéré comme une fonction de s , la régularité de μ par rapport à s n'en résulte que si $r \neq 0$.

Nous supposerons en outre que les dérivées premières et secondes de μ par rapport à s et r sont bornées dans tout l'intervalle de variation de s, r . Enfin rappelons que nous avons supposé que $\int_{-\infty}^{\infty} |\mu| d\theta$ est convergente.

Avant de passer au calcul de l'intégrale (3), nous allons établir quelques égalités et inégalités.

Moyennant les hypothèses faites sur C , on peut développer les coordonnées du point courant A jusqu'au deuxième ordre en s . On a, pour la coordonnée a par exemple :

$$(14) \qquad \qquad a = a_0 + \left(\frac{da}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2a}{ds^2}\right)_1 s^2$$

l'indice 1 signifiant que la dérivée $\frac{d^2a}{ds^2}$ est prise en un point d'abscisse convenable comprise entre zéro et s . Si on désigne par $\alpha\beta\gamma$ les composantes de la normale principale au point courant de C , on a : $\left(\frac{d^2a}{ds^2}\right)_1 = \frac{\alpha_1}{\mathfrak{R}_1}$; on aura de même des expressions affectées des indices 2 et 3 pour les autres coordonnées. On peut donc écrire vectoriellement :

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{O} + \left(\frac{d\overrightarrow{A}}{ds}\right)_s + \overrightarrow{K} s^2$$

le vecteur $\overrightarrow{K}$ ayant pour composantes $\frac{\alpha_1}{2\mathfrak{R}_1}$, $\frac{\beta_2}{2\mathfrak{R}_2}$, $\frac{\gamma_3}{2\mathfrak{R}_3}$. La longueur d'un tel vecteur est certainement inférieure à $\sqrt{3}/2 \mathfrak{R}$. Le tracé géométrique ci-contre donne immédiatement une inégalité résultant de l'équation (14). On a pris sur cette figure :

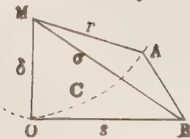


fig. 4

$$\overrightarrow{OB} = s \left(\frac{d\vec{A}}{ds} \right)_0 \quad \overrightarrow{BA} = \vec{K} s^2 \quad MB = \sigma \quad MA = r$$

On voit par suite que, puisqu'on a pris : $|s| < \mathcal{R}\sqrt{3}$ on a :

$$BA = |Ks| \cdot |s| \leq \frac{|s|}{2} < \frac{\sigma}{2}$$

et par suite :

$$r > |MB - BA| > \frac{\sigma}{2}$$

La même figure nous donne :

$$(15) \quad |r - \sigma| < BA < \frac{\sqrt{3}}{2\mathcal{R}} s^2$$

et, en divisant par $r\sigma > \frac{\sigma^2}{2}$:

$$(16) \quad \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{\sigma} \right| < \frac{\sqrt{3}}{2\mathcal{R}} \frac{s^2}{r\sigma} < \frac{\sqrt{3}}{\mathcal{R}} \frac{s^2}{\sigma^2}$$

Passons maintenant au calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu}{r} d\theta = \int_{-\infty}^{s_2} \frac{1}{r} \frac{\mu}{\nu} ds$

En posant pour un instant $h = \mu/\nu$, et en nous plaçant d'abord dans le cas où 0 est intérieur à Γ , nous l'écrirons :

$$\int_{\Gamma} h \frac{ds}{r} = h_0 \int_{\Gamma_0} \frac{ds}{\sigma} + h_0 \int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sigma} \right) ds + \int_{\Gamma_0}^{(h-h_0)} \frac{ds}{r} + \int_{\Gamma_1} h \frac{ds}{r}$$

et nous étudierons chaque intégrale séparément :

$$a/ \int_{\Gamma} \frac{ds}{\sigma}$$

L'intégration est immédiate et donne pour valeur : $\log \left[(\sigma_2 + s_2) / (\sigma_1 + s_1) \right]$

Cette quantité est en général infinie avec $1/\delta$; nous discuterons plus loin des différents cas qui peuvent se présenter.

$$b/ \int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sigma} \right) ds$$

L'inégalité (16) permet d'écrire :

$$\left| \int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sigma} \right) ds \right| < \frac{\sqrt{3}}{\mathcal{R}} \int_{\Gamma_0} \frac{s^2}{\sigma^2} ds = \frac{\sqrt{3}}{\mathcal{R}} \mathfrak{S} < 2$$

Par conséquent, si on suppose h borné supérieurement en module par un nombre H , le deuxième terme est borné supérieurement quel que soit δ .

$$c/ \int_{\Gamma_0} (h - h_0) \frac{ds}{r}$$

On développe en s'arrêtant aux termes du premier ordre :

$$h - h_0 = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_m s + \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_m (r - \delta)$$

l'indice m ayant la même signification que les indices 1, 2, 3 utilisés plus haut. Si on suppose que les deux dérivées premières de h sont bornées supérieurement en module, et qu'on désigne par H' leur borne commune, on a :

$$\left| \int (h - h_0) \frac{ds}{r} \right| < H' \int \frac{|s| + r - \delta}{r} ds$$

Or, on a : $|s| < \sigma < 2r$ et géométriquement sur la fig. 4 : $r - \delta < OA < |s| < \sigma < 2r$, ce qui montre que l'intégrale envisagée a pour borne supérieure :

$$H' 4 \int_{\Gamma_0} ds = 4 H' S < \frac{8}{\sqrt{3}} H' R$$

$$d / \int_{\Gamma_1} h \frac{ds}{r}$$

Comme nous avons supposé que la courbe C n'est pas périodique, c'est-à-dire que le point courant de C ne passe qu'une fois au point 0, r reste borné inférieurement en tout point de Γ_1 par un nombre non nul r_0 . On a donc :

$$\left| \int_{\Gamma_1} h \frac{ds}{r} \right| < \frac{1}{r_0} \int_{\Gamma_1} |h| ds < \frac{1}{r_0} \int_{\Gamma} |h| ds$$

le dernier membre étant une quantité finie indépendante de δ .

Le raisonnement s'est déroulé dans l'hypothèse où 0 est sur Γ . Il continuerait d'être valable lorsque 0 est en aval de Q si h était définie pour cette position de 0. C'est précisément là une condition qui ne sera pas remplie dans un des cas d'application que nous allons examiner ci-dessous. Pour pallier à cet inconvénient il suffit de remplacer dans ce qui précède $h_0 = h(0)$ par $h(Q) = h(s_2) = h_2$. Les résultats obtenus pour les intégrales a, b et d ne sont pas modifiés. Par contre nous devons écrire pour l'intégrale c :

$$h - h_2 = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_m (s - s_2) + \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right)_m (r - r_2)$$

On retrouve évidemment les mêmes limitations que ci-dessus :

$$|s - s_2| = s_2 - s < \sigma < 2r \quad ; \quad |r - r_2| < QA < \sigma < 2r$$

et par conséquent les résultats restent valables en remplaçant simplement h_0 par $h(Q) = h_2$.

Nous pouvons donc énoncer :

Sous les conditions : courbure de C finie et bornée, bornes supérieures en module de h et de ses dérivées premières, intégrabilité de $|h|$ sur Γ , l'intégrale étudiée est la somme d'une partie principale devenant infinie avec $1/\delta$ et d'un reste fini. La partie principale a pour valeur :

$$(17) \quad h_0 \log \frac{\sigma_2 + s_2}{\sigma_1 + s_1}$$

le reste ne dépend que des caractéristiques géométriques de la courbe C et des bornes supérieures de h et de ses dérivées premières. Par h_0 il faut entendre, soit $h(0)$, soit $h(Q)$, suivant que le point 0, pied de la perpendiculaire abaissée de M sur C, est en amont ou en aval du point Q.

Il s'agit maintenant de distinguer les cas dans lesquels 0 est en amont ou en aval de $Q = A(\tau)$. L'un ou l'autre cas se présente suivant que la valeur limite θ_1 de θ_0 lorsque δ tend vers zéro est inférieure ou égale à t .

$$1^\circ / \theta_1 < t$$

La condition $t - \theta_1 > 0$ entraîne que le point 0 est, pour δ assez petit, sûrement en amont de $A(t)$, et aussi en amont de Q. En effet, quand δ tend vers zéro, $c(t - \theta_0) - \delta$ tend vers $c(t - \theta_1) > 0$; comme la fonction $c(t - \theta) - r(\theta)$ est une fonction décroissante de θ , la valeur τ qui l'annule est, pour δ assez petit, certainement supérieure à θ_1 ; on remarque même que $\tau - \theta_0$ tend vers une valeur non nulle lorsque δ tend vers zéro car, en appliquant la formule des accroissements finis à $\frac{c(t - \theta)}{c + \omega} - r(\theta)$ entre θ_0 et τ , on voit que $\tau - \theta_0$ tend vers une limite supérieure à $\frac{c(t - \theta_1)}{c + \omega} \cdot s_2$ et s_2 tendent donc vers des limites non nulles, d'ailleurs égales.

$$\text{On a d'autre part : } \sigma_1 = \sqrt{s_1^2 + \delta^2} = \sqrt{\frac{R^2}{3} + \delta^2} \quad \text{et par suite :}$$

$$\sigma_1 + s_1 = \sqrt{\frac{R^2}{3} + \delta^2} - \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\delta^2}{R} (1 + \alpha)$$

α étant une quantité qui tend vers zéro avec δ . On pourra écrire par conséquent :

$$\log \frac{\sigma_2 + s_2}{\sigma_1 + s_1} = 2 \log \frac{R}{\delta} + \text{quantité finie}$$

et la partie principale de (17) est :

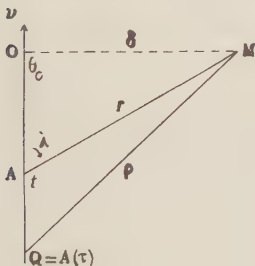
$$2 \frac{\mu_0}{v_0} \log \frac{R}{\delta}$$

avec $\mu_0 = \mu[x^\sigma; a'(b_0), \theta_0]$, $v_0 = v(b_0)$. Le reste fini qui accompagne cette partie principale peut être très grand si s_2 est très petit, c'est-à-dire si θ_1 est voisin de t ; il n'en reste pas moins fini lorsque δ tend vers zéro.

$$2^\circ / \theta_1 = t$$

La discussion est ici plus délicate, s_2 et σ_2 tendant simultanément vers zéro avec δ . Les résultats précédents ne sont plus valables.

Commençons d'abord par calculer un certain nombre de quantités dont nous aurons besoin ici et ultérieurement. Supposons pour simplifier la trajectoire rectiligne et à vitesse constante. Désignons par r la distance A_1M , par λ l'angle de A_1M avec la direction de la vitesse $\vec{v}$. On a d'abord :



$$\delta = r \sin \lambda$$

La valeur du temps τ est donnée par l'équation (4) où $\rho^2 = v^2(b_0 - \tau)^2 + \delta^2$. On en tire facilement, en posant $\beta = v/c$:

$$(18) \quad s_2 = v(\tau - b_0) = -r \frac{\cos \lambda + \beta \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \lambda}}{1 - \beta^2}$$

et :

$$(19) \quad \sigma_2 = \rho = c(t - \tau) = r \frac{\beta \cos \lambda + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \lambda}}{1 - \beta^2}$$

On remarque que s_2 , σ_2 , et r , sont du même ordre d'infinitude quelle que soit la valeur de λ . La quantité $D = \rho(c - v_p)$ est donnée par :

$$(20) \quad \rho(c - v_p) = cr \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \lambda}$$

Dans le cas où la trajectoire n'est plus rectiligne et à vitesse constante, les expressions ci-dessus restent valables à des infiniment petits d'ordre 2 en r près, à condition de prendre pour v la valeur de la vitesse en un point infiniment voisin de $A(t)$, par exemple en $A(t)$ lui-même.

On a alors :

$$\sigma_2 + s_2 = r \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \lambda} - \cos \lambda}{1 + \beta}$$

et, à un facteur voisin de 1 près :

$$(21) \quad \frac{\sigma_2 + s_2}{\sigma_1 + s_1} = \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{R}{1 + \beta} (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \lambda} - \cos \lambda) \cdot \frac{r}{\delta^2}$$

Si λ (ou plus exactement sa valeur limite) est différente de zéro ou de π , le terme ci-dessus est le produit de r/δ^2 par un facteur non nul ; en outre r et δ sont du même ordre d'infinitude. La quantité (17) s'écrit alors, en ne tenant pas compte des quantités toujours finies :

$$h_0 \log \frac{R}{\delta}$$

le coefficient 2 que l'on avait pour $\theta_1 < t$ ayant disparu.

h_0 doit être pris égal à μ_0/v_0 si 0 est en amont de Q , c'est-à-dire si s est positif, donc, d'après (18), si λ est compris entre $\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}$ et π . Si 0 est en aval de Q , il faut prendre :

$$h_0 = \frac{\mu(x^\sigma, a^\sigma)}{v(\tau)}$$

mais, comme la différence $\tau - \theta_0$ est, d'après (18), de l'ordre de r , on peut encore garder μ_0/v_0 sans modifier la partie principale.

Enfin, si $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pi$, δ est un infiniment petit en r d'ordre supérieur à 1, par exemple d'ordre n ; un calcul sans intérêt montre que $\sigma_2 + s_2$ est en général de l'ordre de r (si $\frac{dv}{dt} \neq 0$ et $\beta \neq 1/2$) ; soit plus généralement p l'ordre d'infinitude de $\sigma_2 + s_2$. La partie principale cherchée s'écrit alors :

$$(2n - p) \log \frac{R}{r}$$

BIBLIOGRAPHIE

i. - L. de BROGLIE. - Voir réf. bibl. à l'Introduction

Chapitre II. - DETERMINATION DE LA FONCTION μ .

1. - RESULTAT FONDAMENTAL

Soit à déterminer une fonction $\mu (x^\sigma ; a^\sigma)$ dont le potentiel de ligne satisfasse à l'équation (E) et possède une singularité localisée. D'après le chapitre I, parag. 5 et 7, il suffit pour cela que :

a/ $\frac{\mu(x^\sigma; a^\sigma)}{r}$ ($r = \sqrt{\sum (x^i - a^i)^2}$) vérifie l'équation (E) ;

b/ pour tout couple de points (x^σ, a^σ) vérifiant l'équation $c(t - \theta) - r = 0$, μ vérifie l'équation :

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial x^\sigma} - b_\sigma \mu \right) (x^\sigma - a^\sigma) = 0$$

c/ μ prenne, dès que $x^i = a^i$, des valeurs arbitraires dépendant évidemment de a^i , θ et t , ou encore de a^i , θ , $t - \theta$.

Cette fonction $\mu (x^\sigma ; a^\sigma)$ sera donnée par l'équation :

$$(1) \quad \frac{\mu(x^\sigma; a^\sigma)}{r} = \frac{v(\theta; t - \theta - r/c) U(x^\sigma; a^i, t - r/c)}{r} - 2c \int_0^{t - \theta - \frac{r}{c}} v(\theta; \alpha) \mathcal{U}(x^\sigma; a^i, \theta + \alpha) d\alpha$$

les fonctions U et $\mathcal{U}$ étant déterminées comme suit :

On définit d'abord une fonction $F(x^\sigma ; a^\sigma)$ comme l'intégrale, prise le long de la droite d'espace-temps a , x (a^σ, x^σ) :

$$(2) \quad F(x^\sigma ; a^\sigma) = - \int_a^x b_\sigma(\xi^\sigma) d\xi^\sigma$$

puis on définit U par la relation :

$$(2bis) \quad U = e^F$$

Pour obtenir $\mathcal{U}$ on commence par définir une fonction $\mathcal{U}_0(x^\sigma ; a^\sigma)$ par l'équation :

$$(3) \quad \frac{U_0}{U} = - \frac{1}{4\lambda} \int_0^\lambda \frac{L U}{U} d\lambda$$

l'intégrale étant prise le long de la droite a^σ, x^σ et λ étant un paramètre de description de cette droite proportionnel à $x^\sigma - a^\sigma$; la fonction U est alors définie par la double condition qu'elle vérifie, par rapport aux variables x^σ , l'équation (E) d'une part :

$$L U = 0$$

à l'intérieur du cône caractéristique issu de a^σ , et qu'elle prenne sur ce cône les mêmes valeurs que U_0 d'autre part.

Comme on le voit, la fonction $\mu(x^\sigma; a^\sigma)$ dépend d'une fonction arbitraire $v(\theta; \alpha)$ de deux variables.

On remarquera, sur l'équation (1), sur μ dépend de x^σ et a^σ , directement d'une part, d'autre part par l'intermédiaire de la quantité r qui figure dans U et U ainsi que dans la borne supérieure de l'intégrale. Les fonctions U et U sont des fonctions régulières de leurs arguments x^σ et a^σ . Si on veut que μ soit également une fonction régulière de ses arguments x^σ, a^σ et r , il suffit qu'il en soit de même de v . C'est ce que nous supposons.

2. - LOCALISATION DE LA SINGULARITE. SINGULARITE PONCTUELLE

On verra facilement, sur l'équation (1), que, pour $x^i = a^i$, on a :

$$\mu(a^i, t; a^i, \theta) = v(\theta, t - \theta)$$

les valeurs positives de $t - \theta$ étant les seules à considérer.

D'après ce que nous avons vu au chapitre I, parag. 7, la condition nécessaire et suffisante pour que la singularité soit localisée, à l'instant t , sur l'arc défini par l'intervalle $t - \frac{\chi}{c} \leq \theta \leq t$, est que l'on ait :

$$(4) \quad \begin{array}{ll} v(\theta; \alpha) = 0 & \text{si } \alpha > \frac{\chi}{c} \\ v(\theta; \alpha) \neq 0 & \text{si } \alpha \leq \frac{\chi}{c} \end{array}$$

Si ces conditions sont remplies, la fonction u sera, à chaque instant, bornée et continue dans tout l'espace hormis sur l'arc de C défini par l'intervalle $(t - \frac{r}{c}, t + \frac{r}{c})$.

Nous ne savons pas encore pour l'instant comment se comporteront les dérivées de u . L'étude de ce comportement sera faite au chapitre IV.

Pour réduire l'arc singulier à zéro, il se présente immédiatement un moyen ; c'est de prendre :

$$v(\theta; a) = \omega(\theta) \delta(a)$$

δ étant la fonction de Dirac. La fonction μ prend alors la forme :

$$\mu(x^\sigma; a^\sigma) = \omega(\theta) U(x^\sigma; a^i, t - \frac{r}{c}) \delta(t - \theta - \frac{r}{c}) - 2cr U(x^\sigma; a^\sigma) v_0(\theta)$$

et le potentiel de ligne correspondant s'écrit, en faisant disparaître le facteur c qui est sans importance :

$$(5) \quad u(x^\sigma) = \frac{\omega(\tau) U(x^\sigma; a^i, \tau)}{\rho(c - v_\rho)} - 2 \int_{-\infty}^{\tau} \omega(\theta) U[x^\sigma; a^\sigma(\theta)] d\theta$$

Une telle fonction possède bien une singularité ponctuelle, qui est, à l'instant t , le point $a^i(t)$; cette singularité est introduite par le premier terme de u , l'intégrale étant une fonction continue des variables x^σ .

Remarque.

Nous ne savons pas encore si la fonction μ définie par (1) et le potentiel de ligne qui s'en déduit, ainsi que le potentiel à singularité ponctuelle (5), embrassent la généralité des solutions singulières. Nous résoudrons cette question au chapitre III.

3. - CALCUL DES DERIVEES PARTIELLES DE U .

On trouvera aux démonstrations quelques égalités concernant la valeur de ces dérivées partielles lorsque les points x^σ et a^σ sont confondus, égalités qui nous seront utiles ultérieurement.

4. - EQUATION $\square u = 0$

Nous avons vu, dans l'Introduction, comment on pouvait arriver à définir une solution singulière de cette équation. On montre facilement que, pour

cette équation d'onde, la fonction U de Hadamard est égale à 1, et la fonction $\mathcal{U}$ égale à zéro, de sorte que le potentiel de ligne a pour expression :

$$(6) \quad u(x^\sigma) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu[\theta; c(t-\theta) - r]}{r} d\theta$$

la fonction $\mu(\theta; \alpha)$ étant une fonction arbitraire de ses deux arguments, hormis le fait qu'elle doit, pour localiser la singularité, obéir à la condition :

$$\mu(\theta; \alpha) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha > \chi$$

La forme d'une solution à singularité ponctuelle est :

$$(7) \quad u(x^\sigma) = \frac{\omega(\tau)}{\rho(c - v_p)}$$

On déduit aisément de cette forme le classique potentiel retardé de Liénard-Wiechert de l'électron en mouvement, soit qu'on prenne $\omega(\theta) = e$, charge de l'électron, pour obtenir le potentiel scalaire, soit $\omega = e v^k$ pour obtenir l'une quelconque des composantes du potentiel vecteur.

$$5. - \text{EQUATION} \quad \square u - \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 u = 0$$

Posons, pour simplifier les notations :

$$k = \frac{2\pi}{h} m_0 c$$

La fonction U est encore égale à 1, et la fonction $\mathcal{U}$ prend pour valeur :

$$\mathcal{U}(x^\sigma; a^\sigma) = \frac{k}{2} \frac{J_1[k \sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}]}{\sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}}$$

r étant la distance spatiale de x^i à a^i et J_1 la fonction de Bessel d'ordre 1.

On a par suite pour μ :

$$\frac{\mu(x^\sigma; a^\sigma)}{r} = \frac{v(\theta; t - \theta - r/c)}{r} - c k \int_0^{t-\theta-\frac{r}{c}} v(\theta; \alpha) \frac{J_1[k \sqrt{c^2(t-\theta-\alpha)^2 - r^2(\theta)}]}{\sqrt{c^2(t-\theta-\alpha)^2 - r^2(\theta)}} d\alpha$$

la fonction v étant soumise aux conditions (4) si l'on veut que la singularité soit localisée.

Dans le cas d'une singularité ponctuelle on a pour le potentiel de ligne :

$$(8) \quad u(x^\sigma) = \frac{\omega(\tau)}{\rho(c-v)} - k \int_{-\infty}^{\tau} \omega(\theta) \frac{J_1[k\sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}]}{\sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}} d\theta$$

6. - QUESTIONS DE CONVERGENCE

La forme

$$u = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu}{r} d\theta$$

des solutions singulières n'est acceptable qu'à la condition que l'intégrale soit convergente ; comme r peut très bien rester fini (dans le cas d'une trajectoire fermée par exemple) quel que soit θ , une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'intégrale de $|\mu|$ soit elle-même convergente. C'est la condition que nous avons posée au chapitre I.

On voit immédiatement, sur la forme (5) du potentiel de ligne à singularité ponctuelle, qui est la plus simple à examiner, que la convergence de cette intégrale dépend du comportement à l'infini de $\omega(\theta)$ et $\mathcal{U}(x^\sigma; a^\sigma)$.

De toute évidence on doit assigner à la fonction ω la propriété de rester, quel que soit θ , bornée et non constamment nulle : cette fonction représente, comme nous l'avons vu au chapitre I, parag. 7, une propriété physique du corpuscule, et par suite ne doit pas tendre vers zéro lorsqu'on remonte le cours du temps. C'est là d'ailleurs, nous le verrons au chapitre IV, une condition nécessaire pour que la singularité ne s'évanouisse pas dans son évolution.

La convergence de l'intégrale de (5) dépend donc de $\mathcal{U}$, et sera assurée si $\mathcal{U}(x^\sigma; a^\sigma)$ tend vers zéro assez fortement lorsque $a^4 = \theta$ tend vers $-\infty$, la droite d'espace-temps a^σ, x^σ restant intérieure au cône caractéristique issu de a^σ . Il n'existe pas malheureusement de certitude à cet égard, l'étude de $\mathcal{U}$ à l'infini n'ayant pas, semble-t-il, été faite jusqu'ici. La convergence de l'intégrale est cependant assurée grâce à $\mathcal{U}$ pour les deux équations que nous venons d'envisager, particulièrement pour l'équation $\square u - k^2 u = 0$ où $\mathcal{U}$ est une fonction de Bessel. Il ne semble pas téméraire de penser qu'il en sera de même pour l'équation générale, à condition bien entendu que le champ appliqué b^σ soit lui-même soumis à des conditions convenables à l'infini.

DEMONSTRATIONS

1bis. - DETERMINATION DE LA FONCTION μ

La recherche de la fonction μ/r obéissant aux conditions posées au chapitre I, par. 5, et à la condition de localisation de la singularité est un problème de résolution d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre simplement hyperbolique. Ce problème peut être résolu par la méthode de M. Hadamard (i).

La fonction μ/r doit d'abord, par rapport aux variables x^σ , obéir à l'équation (E). La méthode de M. Hadamard demandant des coefficients réguliers, nous devrions en principe, une fois μ/r substitué dans (E), multiplier par r^3 pour obtenir une équation à coefficients réguliers. Il est tout aussi simple, sinon davantage, d'opérer directement sur l'équation (E) et la fonction μ/r , que nous désignerons ici par u , aucune confusion n'étant à craindre dans ce paragraphe avec le potentiel de ligne. u ne sera pas régulière sur la droite $x^i = a^i$, mais cette non-régularité ne nous gênera pas : comme on va le voir immédiatement nous devrions, pour l'énoncé même d'une des conditions aux limites, entourer l'axe $x^i = a^i$ d'un hypercylindre et opérer à l'extérieur de cet hypercylindre, nous débarrassant de ce fait de la région où les données deviennent infinies. Nous ferons ensuite un passage à la limite en faisant tendre le rayon de l'hypercylindre vers zéro, et la fonction μ recherchée se dégagera d'elle-même.

Le point a^σ étant supposé donné, nous simplifierons tout de suite les écritures en plaçant l'origine des coordonnées d'espace-temps en ce point a^σ , que nous désignerons par 0 ; nous écrirons alors $\mu(x^\sigma)$ au lieu de $\mu(x^\sigma; a^\sigma)$.

Les conditions aux limites imposées à $\mu(x^\sigma)$ sont au nombre de deux.

1°/ Pour $ct - r = 0$, μ doit obéir à l'équation (9bis) du chapitre I :

$$(9) \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^\sigma} + b_\sigma \mu \right) x^\sigma = 0$$

condition qui se traduit pour $u = \mu/r$, par l'équation :

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial x^\sigma} x^\sigma + (b_\sigma x^\sigma + 1) u = 0$$

$c^2 t^2 - r^2 = 0$ est l'équation d'un cône issu de l'origine 0 que nous appellerons le cône Ω . Dans la théorie des équations hyperboliques Ω est le cône caractéristique de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qui définit les surfaces caractéristiques pour le problème de Cauchy ; dans les équations à coefficients constants ce cône se confond avec le cône caractéristique.

r étant une quantité positive, $ct - r = 0$ est l'équation de la partie de ce cône où t est positif, que nous appellerons la partie postérieure. D'après la façon même dont nous avons fixé la borne supérieure de l'intégrale du potentiel de ligne, la recherche de μ n'a lieu d'être effectuée que pour les valeurs positives de $ct - r$, donc uniquement sur la partie postérieure de Ω .

2°/ $\mu(x^i = 0, t)$ doit avoir des valeurs nulles en dehors de l'intervalle $0 < t < \frac{X}{c}$

Nous commencerons par transformer légèrement cette condition en nous donnant plus généralement des valeurs de μ arbitraires sur l'axe des t . Comme cette condition est elle-même difficile à traiter dans les intégrations superficielles que nous rencontrerons, nous pouvons la remplacer par la suivante : μ prend des valeurs données sur un hypercylindre engendré par le déplacement, le long de l'axe des t , d'une sphère Φ de centre $x^i = 0$ et de rayon constant R ; nous appellerons T cet hypercylindre (voir fig. 1).

La condition ainsi imposée à u est donc de prendre sur T des valeurs données de la forme μ/R . Les intégrations effectuées, nous ferons tendre R vers zéro.

Nous avons en définitive à déterminer la fonction u dans le domaine D compris entre le cône postérieur Ω et le cylindre T ; dans ce domaine ni sur sa frontière r n'est jamais nul et les données sont régulières sur la frontière.

Nous verrons un peu plus loin que l'équation (9) équivaut à la donnée de μ sur Ω à condition qu'on connaisse $\mu(0)$, donc que l'équation (10) équivaut à la donnée de u . Nous sommes ainsi ramenés à chercher une solution de (E) connaissant la donnée (régulière) de la fonction u sur une surface caractéristique Ω et une surface T du genre temps. Ce sont là les hypothèses du théorème de Beudon (i) qui affirme que dans ces conditions la solution est déterminée.

Une remarque est à faire : les calculs feront apparaître sur T non seulement la valeur de u , mais aussi de ses dérivées, donc une surabondance de données qui devrait créer des difficultés ; mais nous verrons que cette surabondance disparaît dans le passage à la limite.

Rappels et notations

Nous désignerons dans ce qui va suivre par x (coordonnées x^σ ou x^i, t) le point, intérieur au domaine D , où nous nous proposons s'évaluer la fonction u ; sur les frontières Ω et T , nous particulariserons les notations en désignant par a le point courant et par a^σ (ou a^i, θ) ses coordonnées. Ces coordonnées a^σ (qui n'ont rien à voir avec elles que nous avons plus haut égalées à zéro) serviront de variables d'intégration.

Pour la représentation géométrique nous utiliserons un diagramme en xyt , en supprimant la troisième dimension de l'espace ; une surface (à deux dimensions) de l'espace-temps sera représentée par une courbe, une hypersurface par une surface.

Un point du cône Ω pourra être défini, soit par ses coordonnées cartésiennes liées par la relation :

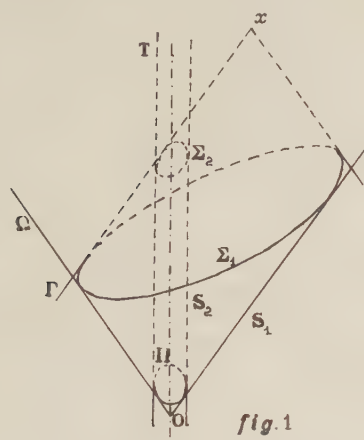
$$\sum a^{i^2} - c^2 \theta^2 = 0$$

soit par ses coordonnées polaires d'espace $\rho = \sqrt{\sum a^{i^2}}$, ζ (colatitude), ψ (longitude), et par la coordonnée temps liée à ρ par la relation $c\theta - \rho = 0$.

Nous aurons à considérer la fonction :

$$r = \sum (a^i - x^i)^2 - c^2(\theta - t)^2$$

et le cône d'équation $\Gamma = 0$, que nous appellerons le cône Γ . C'est le cône (ou conoïde) caractéristique issu du point x . L'intérieur de ce cône est défini par les valeurs négatives de la fonction Γ .



Nous poserons :

$$r = \sqrt{\sum (x^i - a^i)^2} \quad r_0 = \sqrt{\sum (x^i)^2}$$

Considérons maintenant un plan tangent à une surface S donnée en un point a , et soient α_g les composantes de sa normale unitaire. On ne peut définir une telle normale que si l'on s'est fixé une métrique définie positive de l'espace-temps. Nous ne pouvons évidemment prendre pour une telle métrique celle des termes du second ordre de l'équation (E), qui aboutit dans certains cas à des longueurs nulles. Nous prendrons simplement :

$$ds^2 = \sum da^i{}^2 + c^2 d\theta^2$$

$da^i, d\theta$ étant des composantes contrevariantes, La métrique exprimée à partir des composantes covariantes a pour forme :

$$\sum \alpha_i^2 + \frac{1}{c^2} \alpha_4^2$$

α_g étant de telles composantes, comme celles de la normale unitaire que l'on vient de considérer.

On sait qu'on appelle conormale ou transversale à la surface S au point a la droite d'équations :

$$\frac{da^i}{\alpha_i} = - \frac{c^2 d\theta}{\alpha_4} = dv$$

C'est la direction conjuguée de plan tangent à S par rapport au cône caractéristique du sommet a .

Explicitons tout de suite les transversales au cône Ω et au cylindre T . Sur le cône postérieur les composantes de la normale unitaire intérieure au domaine D sont :

$$\alpha_i = - \frac{a^i}{\rho \sqrt{2}} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{c^2 \theta}{\rho \sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

et la transversale y est définie par :

$$(11) \quad \frac{da^i}{dv} = - \frac{a^i}{\rho \sqrt{2}} \quad \frac{d\theta}{dv} = - \frac{\theta}{\rho \sqrt{2}} = - \frac{1}{c \sqrt{2}}$$

On sait d'autre part que les géodésiques de la métrique attachée à l'équation d'onde :

$$\sum da^i{}^2 - c^2 d\theta^2$$

ont pour équations :

$$(12) \quad \frac{da^i}{\omega_i} = - \frac{c^2 d\theta}{\omega_\lambda} = d\lambda$$

les ω_i étant des constantes. Les équations finies des géodésiques issues d'un point x s'écrivent :

$$(13) \quad \frac{a^i - x^i}{\lambda} = \frac{da^i}{d\lambda} = \omega_i \quad \frac{\theta - t}{\lambda} = - \frac{\omega_\lambda}{c^2} = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

en prenant $\lambda = 0$ à l'origine de la géodésique. Deux séries de valeurs proportionnelles des λ définissent la même droite, mais décrites par des valeurs proportionnelles du paramètre λ .

Les génératrices d'un cône Ω sont les géodésiques de longueur nulle de la métrique, les ω_i vérifiant alors l'équation :

$$\sum \omega_i^2 - \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} = 0$$

La comparaison des équations (11) et (13) montre que, sur le cône Ω , comme sur tout cône l' d'ailleurs, la direction $\frac{da^\sigma}{d\lambda}$ est colinéaire à la géodésique génératrice du cône qui passe par le point où on évalue $\frac{da^\sigma}{d\lambda}$; sur une telle géodésique λ est proportionnel à ρ . Si on prend $\lambda = \rho$ comme paramètre et qu'on nomme $\frac{d}{d\rho}$ l'opérateur $\frac{d}{d\lambda}$ que l'on définit alors, on voit que :

$$(14) \quad \frac{d}{d\rho} = -\sqrt{2} \frac{d}{d\lambda}$$

A l'aide des notations ainsi définies, nous exprimerons la condition (9) sous une forme plus appropriée à ce que nous voulons en faire. D'après l'équation (13) on peut écrire (9) sous la forme :

$$(9\text{bis}) \quad \frac{d\mu}{d\lambda} + b_\sigma \frac{da^\sigma}{d\lambda} \mu = 0$$

équation dont l'intégration est immédiate :

$$\log \frac{\mu(a)}{\mu(0)} = - \int_0^a b_\sigma \frac{da^\sigma}{d\lambda} d\lambda$$

l'intégrale du second membre étant prise sur la génératrice qui joint 0 à a . Cette équation est valable même si μ , au point 0, est fonction de la direction a^i/ρ .

D'autre part les équations (11) et celle qui les précède permettent d'écrire (10) sous la forme :

$$(10bis) \quad \frac{du}{dv} + \left(b^\sigma \alpha_\sigma - \frac{1}{\rho\sqrt{2}} \right) u = 0$$

Sur le cylindre T, les composantes de la normale unitaire intérieure à D, donc extérieure à T, sont :

$$\alpha_i = \frac{a^i}{R} \quad \alpha_4 = 0$$

et la transversale est définie par :

$$\frac{da^i}{dv} = \frac{a^i}{R} \quad \frac{d\theta}{dv} = 0$$

Méthode de M. Hadamard

Comme on le sait, la méthode de M. Hadamard pour la résolution des équations simplement hyperboliques consiste à définir une solution élémentaire de l'équation adjointe à l'équation donnée, puis à déterminer la solution de cette dernière grâce à la formule de Riemann généralisée dans laquelle on fait entrer cette solution élémentaire.

Formons donc l'adjointe de l'équation (E) ; elle s'écrit :

$$(\xi) \quad \mathcal{L}v \equiv \square v - 2b^\sigma \frac{\partial v}{\partial a^\sigma} - \left(k + 2 \frac{\partial b^\sigma}{\partial a^\sigma} \right) v = 0$$

en prenant ici les a^σ pour variables de dérivation.

Il existe pour cette équation une famille de solutions élémentaires de la forme :

$$v(a^\sigma) = \frac{V}{\Gamma} + \mathcal{V} \log \Gamma + w$$

expression dans laquelle V, $\mathcal{V}$, et w sont des fonctions régulières de a^σ , et qui en outre dépendent des coordonnées x^σ d'un point fixe de l'espace-temps. Nous noterons $V(a^\sigma, x^\sigma)$ et $\mathcal{V}(a^\sigma, x^\sigma)$ les deux premières fonctions, qui sont seules à intervenir dans l'expression finale de la solution de (E). Γ désigne la fonction, que l'on a définie plus haut, des mêmes points a^σ et x^σ .

M. Hadamard a démontré l'existence de la solution élémentaire et étudié son domaine de validité moyennant des hypothèses d'analyticité ou de régularité sur les

coefficients de l'équation (8). Même si elles étaient trop restrictives pour les applications physiques qui nous intéressent, nous admettrions, pour ces applications, l'existence de la solution élémentaire.

Passons à la définition des fonctions V et Ψ . Considérons la géodésique d'espace-temps qui joint les points x et a , et le paramètre λ défini par (12). On doit prendre pour valeur de V en a celle qui est donnée, pour la valeur de λ qui correspond à a , par l'équation différentielle :

$$4 \frac{dV}{d\lambda} + [H(\Gamma) - 8] V = 0$$

en posant en outre $V = 1$ pour $\lambda = 0$. $H(\Gamma)$ est défini par l'équation :

$$\begin{aligned} H(\Gamma) &= \square \Gamma - 2 b^\sigma \frac{\delta \Gamma}{\delta a^\sigma} = 8 - 4 b^i (a^i - x^i) + 4 c^2 b^4 (\theta - t) \\ &= 8 - 4 b_\sigma (a^\sigma - x^\sigma) \end{aligned}$$

On voit aisément qu'un changement (multiplication par une constante) du paramètre λ qui laisse la géodésique inchangée n'altère pas non plus la valeur de V en a .

Compte tenu de l'expression de $H(\Gamma)$, l'équation en V s'écrit :

$$\lambda \frac{dV}{d\lambda} - b_\sigma (a^\sigma - x^\sigma) V = 0$$

ou encore, en faisant intervenir les équations (13) :

$$\frac{dV}{V} - b_\sigma da^\sigma = 0$$

équation identique, à un signe près, à (9bis) et qui s'intègre comme elle. Nous poserons :

$$(15) \quad F(a^\sigma; x^\sigma) = \int_x^a b_\sigma da^\sigma$$

l'intégration étant faite le long de la droite qui va de x en a . F est une fonction antisymétrique des deux groupes de variables a^σ et x^σ . Nous aurons alors :

$$V(a^\sigma; x^\sigma) = e^{F(a^\sigma; x^\sigma)}$$

V ne pouvant jamais être nul, même quand les coefficients b^σ sont complexes.

Définissons maintenant la fonction Ψ . On commence d'abord par définir une fonction Ψ_0 à qui on impose d'obéir à l'équation différentielle :

$$4 \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{\Psi_0}{V} \right) + \frac{c^2 V}{V} = 0$$

valable, comme elle de V , sur toute géodésique issue du point x , et d'être régulière en ce point. L'intégration immédiate donne :

$$\mathcal{V}_0 = -\frac{V}{4\lambda} \int_0^\lambda \frac{dV}{V} d\lambda$$

Ceci étant, la fonction $\mathcal{V}$ est définie par les deux conditions suivantes : obéir à l'équation (é) à l'intérieur du cône Γ issu de x , et prendre sur ce cône les mêmes valeurs que $\mathcal{V}_0$. M. Hadamard montre que $\mathcal{V}$, dans le cas analytique et même dans quelques autres, peut se définir par la série :

$$(15\text{bis}) \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \mathcal{V}_p \Gamma^p$$

les fonctions $\mathcal{V}_p$ étant données par les formules de récurrence :

$$\mathcal{V}_p = -\frac{V}{4p\lambda^{p+1}} \int_0^\lambda \lambda^p \frac{d\mathcal{V}_{p-1}}{V} d\lambda$$

Ceci posé, menons de x comme sommet le cône Γ rétrograde c'est-à-dire la partie du cône Γ sur laquelle on a $t < 0$; il coupe le cône Ω suivant une variété à deux dimensions Σ_1 qui délimite sur Ω , avec l'intersection Π de Ω et de T , une nappe S_1 (voir fig. 1). Γ coupe également T suivant une variété à deux dimensions Σ_2 ; soit S_2 la partie de T comprise entre Π et Σ_2 . Γ , Ω et T forment la frontière d'un domaine de l'espace-temps d'un seul tenant dans lequel on peut appliquer la formule de Riemann généralisée concernant la solution u de l'équation (E) et la solution élémentaire de l'équation adjointe. Cette méthode conduit à la formule suivante, qui donne la valeur de u :

$$(R) \quad \begin{aligned} 2\pi u(x) = & \iiint_S \left[\mathcal{V} \left(Bu + \frac{du}{dv} \right) - u \frac{d\mathcal{V}}{dv} \right] dS \\ & + \iint_{\Sigma} \left[u \mathcal{V} \frac{d\Gamma}{dv} - \mathcal{V} \left(Bu + \frac{du}{dv} \right) + u \frac{d\mathcal{V}}{dv} \right] d\Sigma - \frac{d}{d\gamma} \iint_{\Sigma_\gamma} u \mathcal{V} \frac{d\Gamma}{dv} d\Sigma_\gamma \end{aligned}$$

dans laquelle :

S désigne l'ensemble des hypersurfaces S_1 et S_2 , Σ l'ensemble des surfaces Σ_1 et Σ_2 ;

B est la quantité $2b^\sigma \alpha_\sigma$;

$\frac{d}{dv}$ est la dérivée suivant la transversale orientée comme le commande la normale intérieure à D ;

Σ_γ est l'intersection de Ω et T avec l'hyperboloïde presque cônica $\Gamma = \gamma$, γ étant un infiniment petit;

la valeur des éléments de surface $d\Sigma_\gamma$ et $d\Sigma$ est obtenue comme suite : on prend comme coordonnées curvilignes définissant l'hypersurface S deux coordonnées quelconques et γ , γ étant la valeur que prend la fonction $\Gamma(a^\sigma; x^\sigma)$ au point où on évalue ces coordonnées. $d\Sigma_\gamma$ est alors le coefficient de $d\gamma$ dans l'expression de dS en fonction de ces coordonnées; $d\Sigma$ est la limite de $d\Sigma_\gamma$ pour $\gamma = 0$. La dérivation dans la dernière intégrale est une dérivation totale et doit être suivie d'un passage à la limite pour $\gamma = 0$.

Emploi des formules d'Hadamard

Nous allons effectuer les intégrations prévues par l'équation (R) successivement sur le cône Ω et sur l'hypercylindre T .

a/ Intégrations sur le cône Ω

Commençons par les intégrales bi-dimensionnelles, en désignant par Σ_{γ_1} la partie de Σ_γ qui se trouve sur Ω .

L'opérateur $\frac{d}{d\mathbf{v}}$ s'écrit, d'après les équations (11) :

$$\frac{d}{d\mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{a}^i}{\rho\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial a^i} - \frac{1}{c\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Appliquons-le aux fonctions Γ et u . Pour Γ on aura :

$$\frac{d\Gamma}{d\mathbf{v}} = -\frac{\sqrt{2}}{\rho} \mathbf{a}^i (\mathbf{a}^i - \mathbf{x}^i) + c\sqrt{2}(\theta - t)$$

donc, compte tenu de l'équation $c\theta - \rho = 0$ sur Ω :

$$\frac{d\Gamma}{d\mathbf{v}} = \sqrt{2} \frac{\mathbf{x}^i \mathbf{a}^i - c t \rho}{\rho}$$

Nous poserons, pour simplifier les écritures :

$$m = c t \rho - \mathbf{x}^i \mathbf{a}^i$$

d'où :

$$\frac{d\Gamma}{d\mathbf{v}} = -\frac{m\sqrt{2}}{\rho}$$

L'application de l'opérateur $\frac{d}{d\mathbf{v}}$ à u a déjà été faite, dans l'équation (10bis), et nous donne :

$$(10ter) \quad 2 \frac{du}{d\mathbf{v}} + Bu - \frac{\sqrt{2}}{\rho} u = 0$$

Explicitons maintenant les éléments de surface dS_1 , $d\Sigma_{\gamma_1}$, et $d\Sigma_1$. En utilisant sur Ω les coordonnées ρ , ζ , φ , on a d'abord :

$$dS_1 = \sqrt{2} \rho^2 \sin \zeta \, d\zeta \, d\varphi \, d\rho$$

Prenons ensuite comme coordonnées sur S : ζ , φ , et γ . On a :

$$\gamma = \sum (a^i - x^i)^2 - c^2 (\eta - t)^2 = r_0^2 - c^2 t^2 + 2m$$

On remarque sur cette équation que m est une quantité positive lorsque γ est nul puisque, x étant intérieur à Ω , $r_0^2 - c^2 t^2$ est une quantité négative ; il en est encore de même lorsque γ est infiniment petit. Le cas limite où x est sur Ω , et où m est nul avec γ , peut paraître soulever des difficultés, mais on verra, tous calculs achevés, qu'il n'en est rien en réalité.

On tire de l'équation précédente :

$$d\gamma = 2ct d\rho - 2x^i \frac{a^i}{\rho} d\rho = \frac{2m}{\rho} d\rho$$

et la valeur de dS_1 en coordonnées ζ , φ , γ s'écrit :

$$dS_1 = \frac{\rho^3 \sqrt{2}}{2m} \sin \zeta \, d\zeta \, d\varphi \, d\gamma$$

Pour $\gamma = 0$ on obtient immédiatement :

$$d\Sigma_1 = \frac{\rho^3 \sqrt{2}}{2} \sin \zeta \, d\zeta \, d\varphi$$

Pour calculer la dérivée de $d\Sigma_1$ par rapport à γ , il faut considérer dans :

$$d\Sigma_1 = \frac{\rho^3 \sqrt{2}}{\gamma + c^2 t^2 - r_0^2} \sin \zeta \, d\zeta \, d\varphi$$

ρ comme une fonction de γ . On aura alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} (d\Sigma_1) &= \sin \zeta \, d\zeta \, d\varphi \left[\frac{3\rho^2 \sqrt{2}}{\gamma + c^2 t^2 - r_0^2} \frac{\rho}{2m} - \frac{\rho^3 \sqrt{2}}{(\gamma + c^2 t^2 - r_0^2)^2} \right] \\ &= \frac{\rho^3 \sqrt{2}}{2m^2} \sin \zeta \, d\zeta \, d\varphi \end{aligned}$$

ce qui, pour $\gamma = 0$, donne :

$$\frac{d}{d\gamma} (d\Sigma_1) = \frac{d\Sigma_1}{m}$$

Nous pouvons passer au calcul effectif de la dernière intégrale de (R). Lorsque ρ varie seul sur le cône Ω , on se déplace sur une génératrice de ce cône, et on a :

$$da' = \frac{a^i}{\rho} d\rho = \frac{a^i}{2m} dy \quad d\theta = \frac{d\rho}{c} = \frac{\rho}{2cm} dy$$

On en tire :

$$\frac{d}{dy}(uV) = \frac{a^i}{2m} \frac{\partial}{\partial a^i}(uV) + \frac{\rho}{2cm} \frac{\partial}{\partial \rho}(uV) = -\frac{\rho\sqrt{2}}{2m} \frac{d}{dv}(uV)$$

puis :

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{d\Gamma}{dv} \right) = -\frac{a^i}{2m} \frac{\partial}{\partial a^i} \left(\frac{m\sqrt{2}}{\rho} \right) = \frac{a^i\sqrt{2}}{2m} \frac{\partial}{\partial a^i} \left(\frac{x^k a^k}{\rho} \right) = 0$$

L'élément différentiel de la dernière intégrale de (R) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} (uV \frac{d\Gamma}{dv}) d\Sigma_1 &= -\frac{\rho\sqrt{2}}{2m} \frac{d}{dv} (uV) \frac{d\Gamma}{dv} d\Sigma_1 + uV \frac{d\Gamma}{dv} \frac{d\Sigma_1}{m} \\ &= \frac{d}{dv} (uV) d\Sigma_1 - \frac{\sqrt{2}}{\rho} uV d\Sigma_1 \end{aligned}$$

Combinons alors les deux dernières intégrales de (R). L'élément différentiel résultant va s'écrire, avec son signe :

$$\left[uV \frac{d\Gamma}{dv} - V(Bu + \frac{du}{dv}) + u \frac{dV}{dv} - \frac{d}{dv} (uV) + \frac{\sqrt{2}}{\rho} uV \right] d\Sigma_1$$

soit, avec des simplifications évidentes :

$$(16) \quad \left[uV \frac{d\Gamma}{dv} - V(Bu + 2\frac{du}{dv} - \frac{\sqrt{2}}{\rho} u) \right] d\Sigma_1$$

Transformons maintenant l'intégrale triple relative à S_1 . En faisant apparaître la quantité $(Bu + 2\frac{du}{dv})$ son élément différentiel s'écrit :

$$\varphi(Bu + 2\frac{du}{dv}) = \frac{d(u\varphi)}{dv}$$

L'intégrale du dernier terme se transforme. Après avoir remplacé, d'après (14), dv par $-d\rho\sqrt{2}$, il vient :

$$\begin{aligned} -\iiint_{S_1} \frac{d(u\varphi)}{dv} dS_1 &= -\iiint_{S_1} \frac{d}{d\rho} (u\varphi) \rho^2 \sin\zeta \, d\zeta \, d\varphi \, d\rho \\ &= -\iiint_{S_1} 2\rho u\varphi \sin\zeta \, d\zeta \, d\varphi \, d\rho + \int_{\Sigma_1 - \Pi} u\varphi \rho^2 \sin\zeta \, d\zeta \, d\varphi \end{aligned}$$

Il étant, rappelons-le, l'intersection de Ω et de T . L'intégrale sur Ω tend évidemment vers zéro avec le rayon R de T . L'intégrale sur S s'écrit donc, à la limite :

$$\iint_{S_1} \Psi \left(Bu + 2 \frac{du}{dv} - \frac{\sqrt{2}}{\rho} u \right) dS_1 + \iint_{\Sigma_1} u \Psi \frac{m\sqrt{2}}{\rho} d\Sigma_1$$

Comme $\frac{m\sqrt{2}}{\rho} = -\frac{d\Gamma}{dv}$, on voit que la dernière intégrale ci-dessus annule la première intégrale du terme (16). Il en résulte que la somme des intégrales sur Ω a pour valeur, et ceci quelle que soit la donnée de u sur :

$$(17) \qquad \iint_{S_1} \Psi \left(Bu + 2 \frac{du}{dv} - \frac{\sqrt{2}}{\rho} u \right) dS_1 - \iint_{\Sigma_1} \Psi \left(Bu + 2 \frac{du}{dv} - \frac{\sqrt{2}}{\rho} u \right) d\Sigma_1$$

Dans le cas général où la donnée de u sur Ω serait quelconque, on remarque qu'elle entraînerait la connaissance de $\frac{du}{dv} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{du}{d\rho}$, et par conséquent constituerait une condition aux limites suffisante, ce qui est en accord avec le théorème de Beudon. Dans le cas qui nous occupe, nous faisons intervenir l'équation (10ter), et on voit alors que la somme des intégrales sur Ω est nulle.

b/ Intégrations sur l'hypercylindre T

Nous opérerons dans le même ordre que sur Ω . L'opérateur $\frac{d}{dv}$ a ici pour expression :

$$\frac{d}{dv} = \frac{a^i}{R} \frac{\partial}{\partial a^i}$$

En l'appliquant à Γ , on obtient :

$$\frac{d\Gamma}{dv} = 2 \frac{a^i(a^i - x^i)}{R} = 2(R - \frac{a^i x^i}{R})$$

L'élément de surface dS_2 a pour valeur :

$$dS_2 = d\Phi . c dt$$

$d\Phi$ désignant l'élément de surface de la sphère Φ . Prenons comme coordonnées sur T , les coordonnées de Φ d'une part, et, au lieu de θ , γ défini par :

$$\gamma = \sum (a^i - x^i)^2 - c^2 (\theta - t)^2 = r^2 - c^2 (\theta - t)^2$$

On en tire :

$$d\gamma = -2c^2 (\theta - t) = 2c \sqrt{r^2 - \gamma}$$

puisque $\theta - t$ est une quantité négative. Il en résulte immédiatement, pour $\gamma = 0$:

$$d\Sigma_2 = \frac{d\Phi}{2r}$$

puis :

$$\frac{d}{d\gamma} (d\Sigma_{\gamma_2}) = \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{d\Phi}{2\sqrt{r^2 - \gamma}} \right) = \frac{d\Phi}{2} \frac{1}{2} (r^2 - \gamma)^{-3/2}$$

donc, pour $\gamma = 0$:

$$\frac{d}{d\gamma} (d\Sigma_{\gamma_2}) = \frac{d\Sigma_2}{2r^2}$$

Nous pouvons maintenant dériver sous le signe $\int$ dans la dernière intégrale de (R) ; on a successivement :

$$\frac{d}{d\gamma} (uV) = \frac{\partial}{\partial \theta} (uV) \frac{1}{2cr}$$

puis :

$$\frac{d}{d\gamma} \left(\frac{d\Gamma}{d\nu} \right) = 0$$

puisque $\frac{d\Gamma}{d\nu} = 2(R - \frac{x' a'}{R})$ ne dépend pas de θ . Il s'ensuit, pour $\gamma = 0$:

$$\frac{d}{d\gamma} (uV \frac{d\Gamma}{d\nu} d\Sigma_{\gamma_2}) = \frac{1}{2cr} \frac{\partial}{\partial \theta} (uV) \frac{d\Gamma}{d\nu} d\Sigma_2 + uV \frac{d\Gamma}{d\nu} \frac{d\Sigma_2}{2r^2}$$

Combinons cet élément différentiel à celui de l'avant-dernière intégrale de (R) ; l'ensemble, avec son signe, a pour valeur, au facteur $d\Sigma_2$ près :

$$(18) \quad uV \frac{d\Gamma}{d\nu} - V \left(\beta u + \frac{du}{d\nu} \right) + u \frac{du}{d\nu} - \frac{1}{2cr} \frac{\partial}{\partial \theta} (uV) \frac{d\Gamma}{d\nu} - \frac{uV}{2r^2} \frac{d\Gamma}{d\nu}$$

Nous devons multiplier cette quantité par $d\Sigma_2 = \frac{d\Phi}{2r}$ et intégrer sur Σ_2 , ou, ce qui revient au même, intégrer sur n'importe quelle sphère Φ en se souvenant que les arguments variables de V et γ sont : a' coordonnées spatiales du point moyen de l'élément d'intégration $d\Phi$, $\theta = t - \frac{r}{c}$.

Nous devons ensuite faire tendre R vers zéro. Dans cette opération, comme u doit être pris égal à μ/R , l'élément différentiel (18) tend vers l'infini en même temps que la surface de Φ tend vers zéro. L'indétermination qui en résulte pour l'intégrale se lève rapidement. Tout élément différentiel de la forme $Q(a', \theta)/R$, où $|Q|$ est bornée, donne une intégrale qui tend vers zéro avec R puisqu'une telle intégrale est de la forme :

$$\left| \mathbf{R} \int \alpha \, d\omega \right| < 4 \pi \mathbf{R} \max de |\alpha|$$

$d\omega$ étant l'angle solide habituel de l'espace.

Tous les termes de (18) vont donc donner une limite nulle, sauf le terme en $\frac{du}{dv}$, dont une partie est en $1/R$ et l'autre égale à :

$$- \frac{1}{2 \pi r} \, V \mu \, \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{\mathbf{R}} \right) = \frac{1}{2 r} \, \frac{V \mu}{\mathbf{R}^2}$$

dont l'intégrale tend visiblement vers :

$$2 \pi \, \frac{V \mu}{r_0}$$

μ et V devant être évalués au point $a' = 0$, $\theta_0 = t - \frac{r_0}{c}$.

Passons maintenant à l'examen des intégrales sur S_z . Ces intégrales s'écrivent :

$$c \iint_{\Phi} d\Phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(V \mu u + \frac{du}{dv} - u \frac{dV}{dv} \right) d\theta$$

θ_1 et θ_2 étant les cotes des points où la verticale qui passe par le point moyen de l'élément $d\Phi$ rencontre respectivement Ω et Γ . Les intégrales en $d\theta$ de $V \mu \mu$, $V \frac{d\mu}{dv}$, $\mu \frac{dV}{dv}$ étant bornées, nous allons nous retrouver, une fois les intégrations correspondantes faites, devant le même problème que précédemment pour l'intégration en $d\Phi$. Seul le terme en μ/R^2 provenant de $\frac{du}{dv}$ va donner une intégrale non nulle lorsque R tend vers zéro ; cette intégrale sera la limite de :

$$- c \iint_{\Phi} \frac{d\Phi}{\mathbf{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} V \mu \, d\theta = - c \iint_{\Phi} \frac{\mathbf{R} \, r}{\mathbf{R}^2 r_0} \, dr \, d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} V \mu \, d\theta$$

et aura pour valeur :

$$- 4 \pi c \int_0^{t - \frac{r_0}{c}} \mu \, V \, d\theta$$

En définitive la solution cherchée u a pour valeur :

$$(19) \quad u(x) = \frac{\mu(x)}{r_0} = V(a_0, x) \frac{\mu(a_0)}{r_0} - 2c \int_0^{t - \frac{r_0}{c}} \mu(a) V(a, x) \, d\theta$$

les coordonnées des points a_0 et a étant respectivement $a_0^i = 0$, $\theta = t - r_0/c$ et $a^i = 0, \theta$. Le point a_0 qui figure dans V et qui est aussi la borne supérieure de l'intégrale est l'intersection de l'axe des θ avec le cône Γ issu de x .

Nous allons tout de suite régler une question qui peut sembler litigieuse : la fonction μ/r donnée par l'équation ci-dessus vérifie-t-elle l'équation d'onde (E) et les conditions aux limites 1° et 2° ?

En ce qui concerne la vérification de l'équation (E) la réponse peut être considérée comme fournie par la théorie générale : la fonction $u(x)$ exprimée par la formule (R) dont les intégrations s'effectuent sur Ω et T est solution de l'équation d'onde. Le passage à la limite ne modifie pas cette conclusion. En effet, la fonction $\mu(x)$ dépendant du paramètre R , il apparaît sans peine, sur les calculs que nous avons faits, que la différence $\mu(x, R) - \mu(x, 0)$ est de la forme $R \varphi(x, R)$ où φ est une fonction régulière des x^σ ; par suite $\frac{R\varphi}{r}$ est infiniment petit avec R , et $\frac{\mu(x, 0)}{r_0}$ vérifie bien l'équation d'onde. Au reste il est facile de se livrer à une vérification directe : elle sera faite au chapitre IV, sur un cas plus général englobant notre cas actuel.

En ce qui concerne les conditions aux limites, la réponse est moins immédiate, particulièrement sur la surface T , où on doit initialement faire intervenir u et $\frac{du}{dv}$; mais l'une de ces deux quantités disparaît dans le passage à la limite, ce qui fait présager que la condition 2° sera bien satisfaite. Faisons-en la vérification directe : on voit immédiatement sur l'équation (19), après l'avoir multipliée par r_0 , que, lorsque x tend vers un point m de l'axe des θ , a_0 tend vers m , V tend vers 1, r_0 tend vers zéro, et qu'à la limite cette équation devient une identité.

La vérification de la condition 1° se fait facilement. Lorsque x vient sur Ω , l'intégrale de (19) devient nulle comme sa borne supérieure, et on obtient :

$$\mu(x) = \mu(0) \cdot V(0; x) = \mu(0) e^{F(0; x)}$$

C'est précisément l'équation que nous avons obtenue par intégration de l'équation (9bis).

Une autre vérification s'impose encore. Nous avons choisi pour surface Φ engendrant le cylindre T une sphère ; en prenant pour une surface d'une autre forme géométrique, obtiendrions-nous la même expression pour la fonction μ ? La réponse n'est pas évidente a priori, et nous devons montrer que, lorsque la limite des intégrales de (R) existe, elle a toujours la même expression, celle qui est donnée par (19). Cette vérification est rejetée au chapitre III, comme celle de la relation $Lu = 0$, et pour les mêmes raisons.

Pour un énoncé général nous devons revenir à nos notations primitives et rétablir explicitement les coordonnées du point 0 que nous avons fait nulles jusqu'à présent. Dans le changement de coordonnées correspondant nous devons à nouveau désigner par $\frac{\mu(x^\sigma, a^\sigma)}{r}$ la fonction dépendant des quatre paramètres a^σ par rapport auxquels on intègre dans la formation du potentiel de ligne et qui vérifie l'équation (E) par rapport aux x^σ ; nous supprimerons l'indice zéro qui affecte r , et avec ces notations l'équation (19) s'écrit :

$$(20) \quad \frac{\mu(x^\sigma, a^\sigma)}{r} = \frac{\mu(a^i, t - \frac{r}{c}; a^i, \theta)}{r} V(a^i, t - \frac{r}{c}, x^\sigma) - 2c \int_0^{t - \theta - \frac{r}{c}} \mu(a^i, \theta + \alpha, a^i, \theta) V(a^i, \theta + \alpha, x^\sigma) d\alpha$$

Le degré d'arbitraire qui préside à la détermination de μ apparaît en posant :

$$v(a^i, \theta; \alpha) = \mu(a^i, \theta + \alpha; a^i, \theta)$$

on voit que μ dépend en général d'une fonction arbitraire de cinq variables ; mais, dans son application au potentiel de ligne, a^i étant fonction de θ , μ dépend d'une fonction arbitraire de deux variables $v(\theta; \alpha)$.

Enfin, au lieu de conserver les fonctions V et Ψ qui interviennent dans la solution élémentaire de l'équation adjointe, nous utiliserons les fonctions U et $\mathcal{U}$ qui interviennent dans la solution élémentaire de l'équation donnée (E) et qui s'écrit $\frac{U}{\Gamma} + \mathcal{U} \log \Gamma + w$. Ces fonctions sont liées aux précédentes par la "propriété d'échange", suivant la dénomination de M. Hadamard, à savoir :

$$U(x^\sigma; a^\sigma) = V(a^\sigma; x^\sigma)$$

$$\mathcal{U}(x^\sigma; a^\sigma) = \Psi(a^\sigma; x^\sigma)$$

en rappelant que, conformément aux notations employées depuis le début de ce paragraphe, le premier groupe de variables (x^σ pour U et a^σ pour V , de même pour $\mathcal{U}$ et Ψ) représente le point par rapport auquel on dérive dans l'équation aux dérivées partielles, le second groupe le point d'où on lance le cône Γ dont la fonction intervient dans la solution élémentaire. Les définitions de U et $\mathcal{U}$ sont, comme on s'en doute, identiques à celles de V et Ψ ; celle de U est donnée au sommaire ; la détermination de $\mathcal{U}$ à partir de $\mathcal{U}_0$ est identique à celle de Ψ à partir de Ψ_0 .

L'équation (20) se transforme alors en équation (1)

2bis. - SINGULARITE PONCTUELLE

Prenons :

$$v(\theta; \alpha) = \omega(\theta) \cdot \delta(\alpha)$$

$\delta(\alpha)$ étant la fonction de Dirac. L'intégrale qui figure au second membre de (1) prend pour valeur $\omega(\theta) \mathcal{U}(x^\sigma; a^i, \theta)$ et par conséquent la fonction $\frac{\mu}{r}$ a pour valeur :

$$\frac{\mu(x^\sigma; a^\sigma)}{r} = \frac{\omega(\theta) U(x^\sigma; a^i, t - \frac{r}{c})}{r} \delta(t - \theta - \frac{r}{c}) - 2c \omega(\theta) \mathcal{U}(x^\sigma; a^\sigma)$$

Introduisons cette fonction dans le potentiel de ligne défini par l'équation (3) du chapitre I. L'intégrale du terme en ω ne présente pas de particularité. Quant à l'intégrale du premier terme, elle s'écrit, en prenant pour variable d'intégration $\xi = t - \theta - \frac{r}{c}$, fonction monotone décroissante de θ :

$$\int_{-\infty}^{\tau} \frac{\omega(\theta) \mathcal{U}(x^\sigma; a^i, t - \frac{r}{c})}{r} \delta(t - \theta - \frac{r}{c}) d\theta = \int_0^{\infty} \frac{\omega(\theta) U(x^\sigma; a^i, \xi + \theta)}{r} \delta \xi \frac{c \delta \xi}{c - v_p} = c \frac{\omega(\tau) U(x^\sigma; a^i, \tau)}{\rho(c - v_p)}$$

a étant, rappelons-le, la valeur de u pour $\theta = \tau$.

L'équation (E) étant linéaire, la constante c qui multiplie les deux termes du second membre du potentiel de ligne est sans importance et on a alors pour u (qui est ici le potentiel de ligne) l'expression donnée par l'équation (5).

On voit que la solution à singularité ponctuelle dépend d'une fonction (réelle ou complexe) arbitraire d'une variable.

3bis. - DERIVEES PARTIELLES DE U POUR $x^\sigma = a^\sigma$.

Les valeurs des dérivées partielles de U , ainsi que de LU , pour $x^\sigma = a^\sigma$, nous seront utiles ultérieurement ; nous allons les calculer tout de suite.

On les obtient par les méthodes classiques du calcul des variations. Le point a restant fixe, déplaçons le point x en x' , de coordonnées $x^\sigma + \delta x^\sigma$; la nouvelle valeur, $F + \delta F$, de F se calcule par intégration le long de la droite ax' variée de ax , et on a toujours le droit de supposer que la variation de la droite ax se fait par une variation $\delta \xi^\sigma$ du point courant proportionnelle à δx^σ , le coefficient de proportionnalité étant $\frac{\lambda(\xi^\sigma)}{\lambda(x^\sigma)}$. La variation de F s'écrit alors :

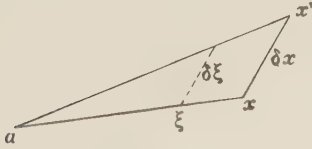


fig. 2

$$\begin{aligned} \delta F &= -\delta \int_a^x b_\sigma d\xi^\sigma = -\int_a^x \frac{\partial b_\sigma}{\partial \xi^\rho} \delta \xi^\rho d\xi^\sigma - \int_a^x b_\sigma d(\delta \xi^\sigma) \\ &= -b_\sigma(x) \delta x^\sigma + \delta x^\sigma \int_a^x \frac{\lambda(\xi^\rho)}{\lambda(x^\rho)} \left(\frac{\partial b_\sigma}{\partial \xi^\rho} - \frac{\partial b_\rho}{\partial \xi^\sigma} \right) d\xi^\rho \end{aligned}$$

On en tire :

$$(21) \quad \frac{\partial F}{\partial x^\sigma}(x, a) = -b_\sigma(x) + \int_a^x \frac{\lambda(\xi^\rho)}{\lambda(x^\rho)} \left(\frac{\partial b_\sigma}{\partial \xi^\rho} - \frac{\partial b_\rho}{\partial \xi^\sigma} \right) d\xi^\rho$$

Comme, pour $x^\sigma = a^\sigma$, on a : $F = 0$, $U = 1$, $\frac{\partial U}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial F}{\partial x^\sigma}$, on en déduit, pour les dérivées de U :

$$(22) \quad \frac{\partial U}{\partial x^\sigma}(a^\rho, a^\rho) = -b_\sigma(a^\rho)$$

Pour calculer les dérivées partielles de F par rapport à a^σ , il est manifeste qu'il suffit de reproduire le calcul qui précède en permutant les bornes de l'intégrale qui donne F , et en recommençant le même raisonnement sur la borne supérieure. Cette permutation introduit simplement un changement de signe, ce qui donne :

$$(23) \quad \frac{\partial U}{\partial a^\sigma}(a^\rho, a^\rho) = b_\sigma(a^\rho)$$

Pour calculer les dérivées secondes de U , on applique la même méthode à l'égalité (21). En posant momentanément :

$$p_{\rho\sigma} = \frac{\partial b_\sigma}{\partial \xi^\rho} - \frac{\partial b_\rho}{\partial \xi^\sigma}$$

et en remarquant que, dans la variation de la droite ax on peut tenir $\lambda(\xi)$ comme invariable, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\tau} \int_a^x \frac{\lambda(\xi^\rho)}{\lambda(x^\rho)} p_{\rho\sigma} d\xi^\rho &= p_{\tau\sigma}(x) + \int_a^x \left[\frac{\lambda(\xi^\rho)}{\lambda(x^\rho)} \right]^2 \left(\frac{\partial p_{\rho\sigma}}{\partial \xi^\tau} - \frac{\partial p_{\tau\sigma}}{\partial \xi^\rho} \right) d\xi^\rho \\ &\quad - \int_a^x \frac{\lambda(\xi^\rho)}{\lambda(x^\rho)} p_{\tau\sigma} \frac{d\lambda(\xi^\rho)}{\lambda(x^\rho)} \end{aligned}$$

A cause de l'intégration en $d\lambda$ on n'a pas le droit de dire que la dernière intégrale tend vers zéro avec $x^\sigma - a^\sigma$, mais une intégration par parties immédiate nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial x^\tau} \int_a^x \frac{\lambda(\xi^\rho)}{\lambda(x^\rho)} p_{\rho\sigma} d\xi^\rho = \frac{1}{x} p_{\tau\sigma}(x) + \int_a^x \left[\frac{\lambda(\xi^\rho)}{\lambda(x^\rho)} \right]^2 \left(\frac{\partial p_{\rho\sigma}}{\partial \xi^\tau} - \frac{1}{x} \frac{\partial p_{\tau\sigma}}{\partial \xi^\rho} \right) d\xi^\rho$$

Lorsque x^σ tend vers a^σ , l'intégrale tend vers zéro et on a par conséquent à la limite :

$$\lim_{x=a} \frac{\partial}{\partial x^\tau} \int_a^x \frac{\lambda(\xi^\rho)}{\lambda(x^\rho)} p_{\rho\sigma} d\xi^\rho = \frac{1}{x} p_{\tau\sigma}(a) = \frac{1}{x} \left(\frac{\partial b_\sigma}{\partial a^\tau} - \frac{\partial b_\tau}{\partial a^\sigma} \right)$$

La dérivation du second membre de l'équation (21) fournit donc :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} = -\frac{1}{x} \left(\frac{\partial b_\sigma}{\partial a^\tau} + \frac{\partial b_\tau}{\partial a^\sigma} \right)$$

d'où il résulte :

$$\square F = -\frac{\partial b_l}{\partial a^l} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial b_4}{\partial t} = -\frac{\partial b^\sigma}{\partial a^\sigma}$$

Calculons maintenant LU pour $x^\sigma = a^\sigma$. On a :

$$LU = L e^F = e^F \left[\square F + \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x^l} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 + 2b^\sigma \frac{\partial F}{\partial x^\sigma} - k \right]$$

ce qui nous donne :

$$(24) \quad LU = -\left(\frac{\partial b^\sigma}{\partial a^\sigma} + b^\sigma b_\sigma + k \right)$$

Cette expression n'est pas identiquement nulle. Elle n'est sûrement pas nulle lorsqu'on prend pour les coefficients b^σ et k les fonctions physiques de la mécanique ondulatoire (on le vérifiera par exemple pour l'équation de l'électron dans un champ électro-magnétique, pour laquelle l'expression (24) est égale à $-m_0^2 c^2$).

4bis.- EQUATION $\square u = 0$.

Les coefficients b^σ étant nuls, la fonction F définie par l'égalité (2) est nulle, et la fonction U définie par l'égalité (2bis) égale à 1. On a par suite $LU = \square U = 0$, donc $u_0 = 0$ d'après l'équation (3), et en fin de compte $u = 0$. On a donc, d'après l'équation (1) :

$$\frac{\mu(x^\sigma, a^\sigma)}{r} = \frac{v(\theta; t - \theta - \frac{r}{c})}{r}$$

d'où l'on déduit, en remarquant que les variables qui figurent dans v sont des fonctions de θ , et avec un léger changement de notations, la forme de u donnée au sommaire.

On remarquera que, d'après la condition de localisation de la singularité :

$$\mu(\theta; a) = 0 \quad \text{si} \quad a > \chi$$

l'intégrale (6) est sûrement convergente car, lorsque θ diminue indéfiniment, $c(t - \theta) - r$ tend vers $+\infty$ pourvu que $v \leq c < c$, donc dépasse χ .

Pour les solutions à singularité ponctuelle l'équation (7) se déduit immédiatement de l'équation (5).

5bis.- EQUATION $\square u - k^2 u = 0$

Comme dans le cas précédent la fonction U a pour valeur 1. La fonction $u(x^\sigma, a^\sigma)$ est définie par l'intégrale (3) :

$$u_0 = -\frac{U}{4\lambda} \int_0^\lambda \frac{LU}{U} d\lambda = -\frac{1}{4\lambda} \int_0^\lambda -k^2 d\lambda = \frac{k^2}{4}$$

La fonction $u(x^\sigma, a^\sigma)$ est alors définie par l'équation :

$$\square u - k^2 u = 0$$

et par la condition :

$$u = u_0 = \frac{k^2}{4}$$

sur le cône caractéristique issu du point a^σ , d'équation :

$$c^2(t-\theta)^2 - \sum (x^i - a^i)^2 = 0$$

Pour une raison de symétrie évidente, nous devons rechercher une fonction u qui ne dépende que de la variable $c^2(t-\theta)^2 - \sum (x^i - a^i)^2$. Prenons pour nouvelle variable :

$$\xi = k \sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}$$

On trouvera facilement :

$$\square u - k^2 u = -k^2 \left(\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{du}{d\xi} + u \right)$$

et on reconnaît en l'équation :

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{du}{d\xi} + u = 0$$

une des formes de l'équation de Bessel, ici celle qui définit la fonction $\frac{J_1(\xi)}{\xi}$. Cette fonction prend pour $\xi = 0$, c'est-à-dire sur le cône caractéristique la valeur $1/2$. La fonction u cherchée est donc :

$$u(x^\alpha, a^\alpha) = \frac{k^2}{2} \frac{J_1(\xi)}{\xi} = \frac{k}{2} \frac{J_1[k \sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}]}{\sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}}$$

La fonction $\mu(x^\alpha, a^\alpha)/r$ a donc bien la valeur indiquée au sommaire. De même l'application de l'équation (5) à ce cas particulier donne l'équation (8).

On remarquera, sur cette expression (8) des solutions à singularité ponctuelle, que l'intégrale en J_1 est convergente si $\omega(\theta)$ est bornée supérieurement. En effet on sait, d'après la théorie des fonctions de Bessel (ii), que, lorsque son argument devient infini, la fonction J_1 tend vers zéro comme la racine carrée de cet argument. Lorsque θ tend vers $-\infty$, $c^2(t-\theta)^2 - r^2 > (c^2 - \omega^2)(t-\theta)^2$ tend vers $+\infty$, J_1 tend vers zéro comme $\sqrt{t-\theta}$ et l'élément différentiel tend vers zéro comme $(t-\theta)^{-3/2}$. L'intégrale est donc bien convergente.

On vérifierait aisément qu'il en est de même du potentiel à singularité linéaire si v vérifie les conditions (4).

L'équation $\square u - k^2 u = 0$ peut fournir directement les solutions singulières en la transformant en une équation à deux variables r , t et en utilisant alors la classique méthode de Riemann (iii).

BIBLIOGRAPHIE

- i.- J. HADAMARD.- Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles hyperboliques.- Hermann, 1932
- ii.- WATSON.- Bessel functions
- iii.- Comptes rendus. 1954, 239, p. 1191

RESULTAT FONDAMENTAL

Les solutions singulières dont la forme a été trouvée au chapitre précédent, équation (1) pour la singularité linéaire, équation (5) pour la singularité ponctuelle, sont les formes les plus générales que l'on puisse trouver pour une solution singulière, sous les conditions suivantes :

a/ la singularité cherchée est du type pôle, et, de manière plus précise :

- pour une singularité ponctuelle, le produit ur de la fonction u par la distance spatiale du point M au point singulier (à un instant donné) tend vers une limite finie lorsque r tend vers zéro ;

- pour une singularité linéaire, le produit $u \log \delta$, δ étant la distance spatiale du point M à l'arc singulier, tend vers une limite finie lorsque δ tend vers zéro.

b/ les limites finies peuvent dépendre de la direction suivant M tend vers la région singulière, mais les fonctions qui expriment ces limites doivent être dérivables une fois.

Outre la singularité linéaire reconnue au chapitre II, on verra qu'il est possible d'en définir une espèce plus générale, dans laquelle l'arc singulier d'espace ne se projette pas sur la trajectoire d'espace.

Enfin, on trouvera en fin de chapitre quelques brèves indications sur les singularités superficielles, ainsi que sur les singularités d'ordre polaire supérieur à celles qui sont énumérées ci-dessus.

DEMONSTRATIONS

Nous devons rechercher si la forme potentiel de ligne que nous avons adoptée jusqu'ici représente ou non la solution singulière la plus générale que puisse posséder une équation d'onde.

Il est bien évident que, posée sous cette forme sommaire, la question appelle vraisemblablement une réponse négative. Les types possibles de singularités sont en nombre très grand ; pour ne prendre que le cas des fonctions analytiques, on en connaît trois : le pôle, le point singulier essentiel, et le point critique. L'existence de ce dernier suppose, il est vrai, la non-uniformité de la fonction, mais des exemples bien connus montrent qu'on ne peut pas rejeter les fonctions multiformes comme n'ayant aucun sens physique. De même il serait hasardeux de dénier a priori ce sens aux fonctions à point singulier essentiel.

Mais, outre les difficultés mathématiques que l'on rencontrerait dans le traitement de telles singularités - difficultés qui ne sauraient constituer une raison valable pour en abandonner l'étude si par ailleurs elle semblait devoir présenter de l'intérêt - un argument intervient pour nous limiter ici au type pôle. Le point de vue auquel nous nous sommes placés en effet consiste à discerner le corpuscule au sein de l'onde en lui attribuant comme zone d'existence la région où la fonction d'onde acquiert des valeurs notablement différentes de celles qu'elle a dans le reste de l'espace. Si on fait de cette région une région singulière, le type de singularité qui se présente comme cas limite de la différenciation précédente est évidemment le pôle.

Nous nous en tiendrons donc à ce type. Il faut encore y faire des distinctions suivant l'étendue de la région singulière. Dans l'espace cette région peut être un point, une ligne (fermée ou non), une surface (fermée ou non).

Le cas des volumes singuliers est en effet à écarter d'emblée : à l'intérieur de tels volumes, il n'y a pas de dérivation possible, sauf peut-être pour des classes de fonctions extraordinairement éloignées de celles que l'on considère aujourd'hui encore en physique (avec d'ailleurs une définition de la dérivation tout aussi éloignée de la définition ordinaire), de sorte que l'équation aux dérivées partielles n'a plus aucun sens dans la région singulière.

Sur les trois cas restants, nous ne retiendrons que les deux cas de la singularité ponctuelle et de la singularité linéaire ; nous donnerons in fine quelques brèves indications sur la singularité superficielle.

Pour obtenir la forme analytique des fonctions qui admettent des singularités, on peut se proposer de reprendre le procédé déjà employé au chapitre II : enfermons, dans l'espace-temps, la région décrite par la singularité dans un tube T (voir fig. 1) et traçons le cône caractéristique postérieur Ω issu d'un point quelconque de l'espace-temps. Ce cône coupe sûrement le tube si ce dernier est du genre temps, ce que nous supposerons constamment. Dans le domaine compris entre le tube T et le cône Ω on a toujours le droit d'appliquer la méthode de M. Hadamard, et la formule (R) du chapitre II donne la valeur de la fonction $u(x^q)$ lorsqu'on connaît les données convenables sur T et Ω . Si alors on fait tendre T vers la région singulière, les intégrales de (R) peuvent tendre vers des limites finies. On obtient dans ce cas la forme analytique de la singularité.

Ce processus simple va se compliquer à l'application pour trois raisons.

Il n'est pas facile, en premier lieu, de trouver les conditions nécessaires à imposer à u et à ses dérivées sur la région singulière pour que les limites des intégrales de (R) existent. On pourra par contre définir des conditions suffisantes en précisant l'allure de la fonction au voisinage du pôle, et en lui imposant d'être de la forme f/r^n , où n est un entier et f satisfait à des conditions de régularité. Ces restrictions simplifient le problème sans diminuer beaucoup, semble-t-il, la portée physique des résultats.

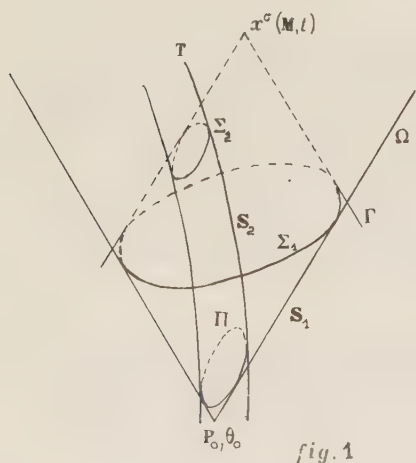
De toute évidence d'autre part, l'ordre du pôle aura une influence sur la forme de la fonction u . Nous nous limiterons aux pôles d'ordre minimum, en donnant en fin de chapitre quelques indications sur les pôles d'ordre supérieur.

Enfin l'étendue de la région singulière, point ou ligne, complique encore le problème. Nous devrons, pour la clarté de l'exposition, traiter séparément les divers cas.

Ces généralités dégagées, nous allons détailler les stades successifs du raisonnement en précisant au passage les hypothèses.

Formules de Hadamard pour une surface du genre temps.

Nous supposons dans tout ce qui suit que chaque point de la région singulière se déplace avec une vitesse v bornée supérieurement par un nombre $\omega < c$. Le tube T d'espace-temps qui enferme la région singulière peut donc être pris du genre temps ; on peut le considérer comme engendré par une surface d'espace fermée Φ enfermant à chaque instant la région singulière d'espace.



Soit $x^\sigma(M, t)$ un point de l'espace-temps, et Γ le cône caractéristique rétrograde issu de x^σ . Γ coupe sûrement T suivant une surface Σ_2 fermée.

Supposons la fonction d'onde donnée, ainsi que ses dérivées premières, sur T . Le domaine extérieur à T et intérieur à Γ étant ouvert, ces données sont insuffisantes pour résoudre le problème de Cauchy. C'est pour cette raison que nous devons introduire le cône postérieur Ω^σ , choisi de telle façon qu'il contienne le point x^σ à son intérieur. Pour des raisons de simplicité nous prendrons pour sommet de Ω un point P_0, θ_0 de la région singulière, rejeté suffisamment loin dans la direction des t négatifs pour que Ω comprenne à son intérieur une vaste région de l'espace-temps. Ω coupe sûrement T suivant une surface fermée Π , et Γ suivant une surface fermée Σ_1 .

Soit S_1 la partie de Ω comprise entre Π et Σ_1 , S_2 la partie de T comprise entre Π et Σ_2 . Comme nous l'avons déjà vu au chapitre II, la donnée de u sur Ω entraîne la connaissance de $\frac{du}{dv}$. La même remarque est également à faire qu'au chapitre II concernant la superfluité des données sur T et Ω .

Appliquons maintenant la formule (R) aux conditions ainsi définies. Nous allons d'abord nous préoccuper des intégrales sur Σ_2 et sur S_2 . Calculons les quantités dS_2 , $d\Sigma_2$, $\frac{d\Gamma}{dv}$, $\frac{d}{dv}(d\Sigma_2)$ sur T .

Si nous désignons par $a^i(a^i, \theta)$ les coordonnées cartésiennes de T, par $\xi_1 \xi_2 \theta$ un système de coordonnées curvilignes de T, on voit facilement, en prenant toujours pour métrique de l'espace-temps $ds^2 = \sum da^{i^2} + c^2 d\theta^2$, que l'on a :

$$dS_2 = \sqrt{c^2 + v_n^2} \quad \text{H} \quad d\xi_1 d\xi_2 d\theta$$

v_n désignant la projection de la vitesse du point courant de Ψ sur la normale à Ψ au même point (les deux vecteurs étant pris dans l'espace) et H le déterminant classique de la théorie des surfaces pour la surface Ψ .

Si nous désignons par α_i les composantes de la normale unitaire extérieure à Φ , prise dans l'espace, les composantes covariantes de la normale extérieure à T sont, comme on le voit aisément, proportionnelles à α_i , $\alpha_i v^i = -v_n$ et par suite les composantes contrevariantes de la normale unitaire sont :

$$\frac{c \alpha_i}{\sqrt{c^2 + v_n^2}}, \quad - \frac{c v_n}{\sqrt{c^2 + v_n^2}}$$

L'opérateur $\frac{d}{dv}$ s'écrit alors (voir chapitre II, par. 1bis) :

$$\frac{d}{dv} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + v_n^2}} \left(\alpha_i \frac{\partial}{\partial a^i} + \frac{v_n}{c^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

On en tire pour $\frac{d\Gamma}{dv}$ en tout point de T :

$$(1) \quad \frac{d\Gamma}{dv} = 2 \frac{c}{\sqrt{c^2 + v_n^2}} \left[(a^i - x^i) \alpha_i - \frac{v_n}{c^2} c^2 (\theta - t) \right]$$

et par conséquent sur Σ_2 , où on a $\Gamma = 0$, donc $r = -c (\theta - t)$:

$$\frac{d\Gamma}{dv} = \frac{2c}{\sqrt{c^2 + v_n^2}} r \left(\frac{dr}{dn} + \frac{v_n}{c} \right)$$

$\frac{dr}{dn}$ désignant la dérivée de r prise le long de la normale à Φ suivant la règle habituelle.

Nous savons devoir calculer la dérivée de la dernière intégrale de (R) par rapport à $\gamma = \sum (a^i - x^i)^2 - c^2 (\theta - t)^2$, ce que nous ferons en substituant encore γ à θ dans les coordonnées curvilignes de T. Dans le calcul de dérivation composée, nous devons prendre pour dérivée par rapport à θ la dérivée totale, c'est-à-dire la dérivée prise le long des trajectoires $\xi_1 = \text{Cte}$, $\xi_2 = \text{Cte}$ de T (dans l'étude du chapitre II dérivée totale et dérivée partielle s'identifiaient). On trouvera ainsi pour $\frac{d\Gamma}{dv}$, en opérant sur l'expression (1) et en faisant ensuite $\gamma = 0$:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\Gamma}{dv} \right) = \frac{2c}{\sqrt{c^2 + v_n^2}} \left[(a^i - x^i) \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta} + \frac{r}{c} \frac{\partial v_n}{\partial \theta} \right] - \frac{2c v_n}{(c^2 + v_n^2)^{3/2}} \frac{\partial v_n}{\partial \theta} r \left(\frac{dr}{dn} + \frac{v_n}{c} \right)$$

De même on aura :

$$d\gamma = 2 \left[(a^i - x^i) v^i - c^2 (\theta - t) \right] d\theta = 2 (c \sqrt{r^2 - \gamma} - r v_r)$$

d'où pour $\gamma = 0$:

$$\frac{d\theta}{d\gamma} = \frac{1}{2r(c - v_r)}$$

v_r étant, rappelons-le, la projection de $\vec{v}$ sur le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$.

On en déduira aisément :

$$d\Sigma_2 = \frac{1}{2r(c - v_r)} \sqrt{c^2 + v_n^2} \, H \, d\xi_1 \, d\xi_2$$

et

$$\frac{1}{d\Sigma_2} \frac{d}{d\gamma} (d\Sigma_{\gamma 2}) = \frac{v_n}{c^2 + v_n^2} \frac{\partial v_n}{\partial \theta} \frac{1}{2r(c - v_r)} + \frac{c^2 - v^2 + r \gamma_r}{2r^2(c - v_r)^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{1}{2r(c - v_r)}$$

γ_r étant la projection de l'accélération au point courant de Ψ sur $\overrightarrow{AM}$.

Reportons-nous maintenant à l'équation (R) du chapitre II. L'élément différentiel sur Σ_2 , pour commencer par lui, s'écrit, en faisant abstraction du coefficient $d\Sigma_2$:

$$u \left[\Psi \frac{d\Gamma}{dv} - B V + \frac{dV}{dv} - \frac{dV}{d\theta} \frac{d\theta}{d\gamma} \frac{d\Gamma}{dv} - V \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\Gamma}{dv} \right) \frac{d\theta}{d\gamma} - V \frac{d\Gamma}{dv} \frac{1}{d\Sigma_2} \frac{d}{d\gamma} (d\Sigma_{\gamma 2}) \right] \\ - V \frac{du}{dv} - V \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{d\gamma} \frac{d\Gamma}{dv}$$

En explicitant les quantités $\frac{d\Gamma}{dv}$, $\frac{d\theta}{d\gamma}$, ... et en rétablissant le facteur $d\Sigma_2$, cet élément différentiel s'écrit :

$$(2) \quad \left[\alpha u - V \sqrt{c^2 + v_n^2} \frac{du}{dv} - V \frac{du}{dv} \frac{c \frac{dr}{dn} + v_n}{c - v_r} \right] \frac{H \, d\xi_1 \, d\xi_2}{2r(c - v_r)}$$

avec .

$$\alpha = 2 \Psi r \left(c \frac{dr}{dn} + v_n \right) + \sqrt{c^2 + v_n^2} \left(\frac{dV}{dv} - B V \right) - \frac{dV}{d\theta} \frac{1}{c - v_r} \left(c \frac{dr}{dn} + v_n \right) \\ + V \frac{1}{c - v_r} \left(c \frac{x^i - a^i}{r} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta} - \frac{\partial v_n}{\partial \theta} \right) - V \left(c \frac{dr}{dn} + v_n \right) \left[\frac{c^2 - v^2 + r \gamma_r}{r(c - v_r)^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{1}{c - v_r} \right]$$

L'élément différentiel sur S_2 s'écrit :

$$(3) \quad \left[\left(B \nabla - \frac{d \nabla}{d v} \right) u + \nabla \frac{d u}{d v} \right] \sqrt{c^2 + v_n^2} \, H \, d \xi_1 \, d \xi_2 \, d \theta$$

En ce qui concerne les intégrales sur Ω d'autre part, nous avons trouvé au chapitre II, par. 1bis, une expression simple. C'est l'expression (17), que nous reprendrons telle quelle :

$$(4) \quad \iint_{S_1} \nabla \left(B u + 2 \frac{d u}{d v} - \frac{\sqrt{2}}{\rho} u \right) d S_1 - \iint_{\Sigma_1} V \left(B u + 2 \frac{d u}{d v} - \frac{\sqrt{2}}{\rho} u \right) d \Sigma_1$$

ρ étant la distance spatiale du sommet P_0 de Ω au point d'intégration. On a en outre dans cette équation :

$$(5) \quad d S_1 = \sqrt{2} \, \rho^2 \sin \zeta \, d \zeta \, d \varphi \, d \rho \quad d \Sigma_1 = \frac{\rho^3 \sqrt{2}}{2 m} \sin \zeta \, d \zeta \, d \varphi$$

avec :

$$(6) \quad m = c(t - t_0)\rho - (x^i - a_0^i)(a^i - a_0^i) = \frac{1}{2} \left[c^2(t - t_0)^2 - r_0^2 \right] = c t e$$

r_0 étant la distance spatiale $P_0 M$.

Nous utiliserons les expressions (2), (3) et (4) pour chaque type de singularité à étudier, en choisissant convenablement dans chaque cas la surface Φ et le tube T .

Allure de la fonction u au voisinage de la singularité.

Nous ne considérerons que les fonctions u dont l'allure au voisinage de la région singulière est définie de la façon suivante :

a/ pour une singularité ponctuelle :

Si r est la distance spatiale du point M pris à l'instant t au point singulier $P(t)$ considéré au même instant, le produit ur^n (n entier positif) tend vers une limite finie lorsque r tend vers zéro, limite qui peut dépendre de la direction PM . On peut alors mettre u sous la forme :

$$u = \frac{f[\nu(t), t, \zeta, \varphi, r]}{r^n}$$

ζ , φ , r étant les coordonnées polaires spatiales d'origine $P(t)$, et f tendant vers une limite $f(P, t, \zeta, \varphi, 0)$ lorsque r tend vers zéro. Le point P sera dit un pôle d'ordre n . Nous précisons ci-dessous les conditions de régularité auxquelles f doit être assujettie.

b/ pour une singularité linéaire

Si δ est la distance minimum à l'instant t du point M à l'arc singulier l (supposé de longueur finie), $u\delta^n$ tend vers une limite finie lorsque δ tend vers zéro.

La forme de la fonction au voisinage de l'arc singulier varie suivant la position de M par rapport à l .

Si M est dans un voisinage convenable de l , la distance minimum δ est la longueur de la perpendiculaire abaissée de M sur l ; u est alors de la forme :

$$u = \frac{f[P(t), t, \varphi, \delta]}{\delta^n}$$

$P(t)$ étant ici le pied de la perpendiculaire en question et φ un angle qui permet de repérer PM par rapport à l (par exemple l'angle de PM et de la normale principale à l).

Si on ne peut pas abaisser de perpendiculaire de M sur l , δ est la distance de M à une des extrémités de l , et u a alors la même forme que dans le cas de la singularité ponctuelle. Il est à noter que si la courbe l est fermée cette éventualité ne se présente pas.

Un pôle d'ordre logarithmique sera défini en remplaçant δ^n par $\log \delta$

La fonction u étant dérivable deux fois en dehors de la région singulière, il s'ensuit qu'il en est de même des diverses fonctions f explicitées ci-dessus. Nous formulerons en outre l'hypothèse que cette dérivabilité de f existe encore, au moins une fois, lorsque r (ou δ) = 0, par rapport à tous les arguments de f .

On tire aisément de là la conclusion que, si u admet une singularité polaire d'ordre n , ses quatre dérivées premières admettent une singularité polaire d'ordre au plus égal, et en général égal, à $n+1$. Raisonnons par exemple sur la singularité ponctuelle. On trouvera facilement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{nf}{r^{n+1}} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

et les termes en $1/r^{n+1}$ sont :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{r^{n+1}} \left(-nf \sin \zeta \cos \varphi - \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cos \zeta \cos \varphi - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\cos \zeta} \right)$$

Une forme analogue vaut pour chaque dérivée spatiale.

Quant à la dérivée par rapport à t , elle s'écrit, en désignant pour un instant par p^i les coordonnées de $P(t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{1}{r^n} \frac{\partial f}{\partial p^i} - \frac{nf}{r^{n+1}} \frac{\partial r}{\partial p^i} + \frac{1}{r^n} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial p^i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial p^i} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial p^i} \right) \right] \frac{dp^i}{dt} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial f}{\partial t}$$

et les termes en $1/r^{n+1}$ sont :

$$(7) \quad \left[-\frac{n f}{r^{n+1}} \frac{\partial f}{\partial p^i} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial p^i} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial p^i} \right] \frac{d p^i}{d t} = - \left[\frac{\partial u}{\partial x^i} \right] \frac{d p^i}{d t}$$

$\left[\frac{\partial u}{\partial x^i} \right]$ désignant, comme ci-dessus, les termes en $1/r^{n+1}$ des dérivées spatiales. Cette dernière expression nous sera utile plus loin.

Nous pouvons maintenant passer aux calculs des formes analytiques dans les différents cas.

Singularité ponctuelle d'ordre 1.

Si nous désignons, à l'instant θ , par $P(\theta)$ la position spatiale du point singulier, nous pouvons prendre pour Φ , à cet instant, la sphère de centre $P(\theta)$ et de rayon constant R . Nous pouvons ensuite supposer que Φ se déplace par une translation égale à celle de P . En prenant alors pour ξ_1, ξ_2 les coordonnées angulaires de Φ (ξ_1 colatitude, ξ_2 longitude orientées suivant l'usage par rapport aux axes $x y z$) $H = R^2 \cdot \sin \xi_1 d\xi_1 d\xi_2$ est indépendant de θ ; le tube T est un canal centré sur la trajectoire d'espace-temps L du point $P(\theta), \theta$. L'intégration sur Σ_2 peut se faire sur n'importe laquelle des sphères Φ , à condition bien entendu d'évaluer l'élément différentiel sur Σ_2 . Enfin v , vitesse de P et de chaque point de Φ , est bornée en grandeur par $c < c$.

Considérons les trois séries d'intégrales qui donnent la valeur de $u(x^i)$. Commençons par l'intégrale sur Σ_2 . En raison du choix de la surface Φ , tous les éléments de la quantité α , équation (2), et par conséquent cette quantité elle-même, sont des quantités bornées. u admettant une singularité polaire d'ordre 1, αu est de la forme K/R , $|K|$ étant une quantité bornée quel que soit le point de Σ_2 intéressé dans l'intégration. L'intégrale de αu sur Σ_2 tend donc vers zéro lorsque le tube T tend vers L , c'est-à-dire lorsque R tend vers zéro.

L'intégrale de $\frac{du}{dv}$ sur Σ_2 tend vers une limite qui, en général, n'est pas nulle. En effet, $\frac{du}{dv}$ est de la forme :

$$\frac{du}{dv} = \frac{g[P(\theta), \theta, \zeta, \varphi, R]}{R^2}$$

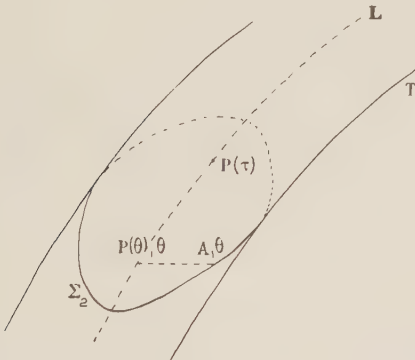


fig. 2

Pour chaque point A de Σ_2 , ayant pour cote un temps θ , on peut donner à V et à $\frac{1}{r(c-v_r)}$ les valeurs qu'ont ces quantités au point $P(\theta)$, intersection de la trajectoire L de P avec le plan de cote θ . Ce faisant, on commet une erreur de l'ordre de R , dont l'intégrale, après multiplication par $\frac{du}{dv} \sqrt{c^2 + v_n^2} R^2 \sin \xi_1 d\xi_1 d\xi_2$ tend vers zéro avec R . On commet une seconde erreur en remplaçant, pour tous ces points $P(\theta)$, le temps θ variable par τ , temps de l'intersection de L et de Γ . Cette erreur, qui affecte V , $\frac{1}{r(c-v_r)}$ et $v_n(\theta) = v_x(\theta) \cdot \sin \xi_1 \cos \xi_2 + \dots$

est encore de l'ordre de R et fournit une intégrale à limite nulle. La limite correspondant au terme en $\frac{du}{dv}$ est donc de la forme :

$$-\frac{V}{2r(c-v_r)} \lim \int_{\Phi} g[P(\tau), \tau, \zeta, \varphi, R] \sqrt{c^2 + v_n^2(\tau)} \sin \xi_1 d\xi_1 d\xi_2$$

les termes en dehors de l'intégrale étant pris en x^σ et $P(\tau), \tau$. La limite cherchée est donc de la forme :

$$(8) \quad \frac{\sigma(\tau) V [P(\tau), \tau, x^\sigma]}{r(\tau) [c - v_r(\tau)]}$$

$\sigma(\tau)$ étant une fonction de la seule variable τ .

Reste enfin, pour Σ_2 , l'intégrale du terme en $\frac{du}{d\theta}$. Cette intégrale aura une limite nulle si $\frac{du}{d\theta}$ admet un pôle d'ordre 1 et non d'ordre 2, et cette éventualité se trouve réalisée du fait que l'on peut écrire :

$$\frac{du}{d\theta}(A, \theta) = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial a^i} \frac{da^i}{d\theta}$$

et que le second membre, d'après l'équation (7) et puisque les vitesses de P et de A sont les mêmes, ne présente plus de termes en $1/R^2$.

La limite des intégrales sur Σ_2 se réduit donc à la quantité (8).

La limite de l'intégrale sur S_2 se calcule suivant la même méthode ; on voit sans difficulté qu'elle est :

$$-2 \int_{\theta_0}^{\tau} [P(\theta), \theta, x^\sigma] \sigma(\theta) d\theta$$

la fonction σ étant la même que dans l'expression (8) puisque dans les deux cas elle est la limite de $-\frac{1}{2} \int g \sqrt{c^2 + v_n^2} \sin \xi_1 d\xi_1 d\xi_2$

Considérons maintenant les intégrales sur Ω , dont la valeur est donnée par l'expression (4). Le sommet de Ω est le point $P(\theta_0), \theta_0$. L'intégrale sur S_1 a une limite lorsque le rayon R de T tend vers zéro, puisque $2 \frac{du}{dv} - \frac{\sqrt{2}}{\rho} u$ est en $1/\rho^2$ et que

dS_1 est en $\rho^2 d\rho$. L'intégrale sur Σ_1 , d'autre part, est indépendante des données sur T dès que R est assez petit pour que Π n'ait aucun point commun avec Σ_1 . Elle est évidemment finie tant que M n'est pas sur Ω puisque, si on se reporte aux équations (5) et (6) donnant $d\Sigma_1$, m est alors différent de zéro. Un doute peut s'introduire lorsque M tend vers un point de Ω ; il est facile de le lever de la façon suivante. En prenant l'axe des z dirigé de $P(\theta_0)$ vers M, on trouve aisément, à partir des équations (6) :

$$m = \rho [c(t - \theta_0) - r_0 \cos \zeta]$$

d'où :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{r \sin \zeta d\zeta}{c(t - \theta_0) - r_0 \cos \zeta} = 0 \quad d\Sigma_1 = -\frac{1}{r\sqrt{2}} \rho d\rho d\varphi$$

ρ décroissant de $\rho_2 = \frac{c(t-\theta_0)+r_0}{2}$ à $\rho_1 = \frac{c(t-\theta_0)-r_0}{2}$ lorsque ζ croît de 0 à π . L'intégrale sur Σ_1 du terme en $V(2 \frac{du}{dv} - \frac{\sqrt{2}}{\rho} u)$ s'écrit alors, en vertu de l'égalité (14) du chapitre II :

$$\frac{1}{r} \iint \left(\frac{du}{d\rho} + \frac{u}{\rho} \right) \rho \, d\rho \, d\varphi = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\rho u \right]_{\rho_1}^{\rho_2}$$

quantité évidemment finie et bornée. Il en est de même de l'intégrale de Bu , puisque $Bu\rho$ est bornée.

Nous avons donc pour limite de l'intégrale sur Ω :

$$F(M, t) = \iint_{S_0} V \left(Bu + 2 \frac{du}{dv} - \frac{u\sqrt{2}}{\rho} \right) dS_0 - \iint_{\Sigma_1} V \left(Bu + 2 \frac{du}{dv} - \frac{u\sqrt{2}}{\rho} \right) d\Sigma_1$$

S_0 étant maintenant la totalité de la nappe de Ω intérieure à Σ_1 .

On voit sur son expression que la fonction F ne dépend pas de la donnée de u sur toute la trajectoire L du point singulier, mais seulement de cette donnée en un point particulier de cette trajectoire, $P(\theta_0), \theta_0$. En outre, $F(M, t)$ vérifie l'équation (E) : ce résultat est immédiat si l'on observe que F est la solution du problème de Cauchy pour des données portées par Ω seul. Enfin il est facile, en explicitant les dérivées de F , de vérifier qu'elle est une fonction régulière de x^σ (sauf au point $\bar{P}(\theta_0), \theta_0$).

En définitive nous voyons que la solution cherchée se met sous la forme :

$$(9) \quad u = u_0 + \frac{F}{2\pi}$$

avec :

$$(10) \quad 2\pi u_0 = \frac{\sigma(\tau) V[p(\tau), \tau, x^\sigma]}{r(\tau) [c - v_r(\tau)]} - 2 \int_{\theta_0}^{\tau} \sigma(\theta) V[p(\theta), \theta, x^\sigma] d\theta$$

Comme F est solution de l'équation (E), de même que u , u_0 est solution de (E). Nous l'appellerons la solution singulière, par opposition à F , solution singulière.

Deux points restent à élucider. Trouverions-nous la même forme de la solution si, au lieu de prendre pour surface Φ enfermant la singularité une sphère, nous prenons une surface quelconque ? Et d'autre part que devient la forme de la solution que nous venons de trouver lorsqu'on fait tendre θ_0 vers $-\infty$?

Pour répondre à ces deux questions, nous aurons besoin de formules qui apparaissent d'elles-mêmes au cours de la vérification directe du fait que u_0 est solution de l'équation (E). Nous allons donc entreprendre de suite l'étude correspondante, dont on constatera aisément qu'elle contient comme cas particulier la vérification annoncée au chapitre II, par. 1bis.

Vérification directe de la relation $L u = 0$.

Nous remplacerons d'abord les fonctions $V(a^\sigma; x^\sigma)$ et $\Psi(a^\sigma; x^\sigma)$ par les fonctions $U(x^\sigma; a^\sigma)$ et $\mathcal{U}(x^\sigma; a^\sigma)$ que nous avons définies au chapitre II, par. 1, et que nous savons leur être respectivement égales. La solution singulière s'écrit alors, en reprenant les notations du chapitre II :

$$(11) \quad u_c(x^\sigma) = \frac{\omega(\tau) \mathbf{U}[x^\sigma; \mathbf{P}(\tau), \tau]}{\rho(c - \nu_\rho)} - \frac{2}{\theta} \int_0^\tau \omega(\theta) \mathcal{U}[x^\sigma; \mathbf{P}(\theta), \theta] d\theta$$

Les dérivations que nous allons effectuer par rapport aux variables x^σ sont doubles : elles comprennent la dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ par rapport aux x^σ figurant explicitement dans $U, \mathcal{U}$, etc..., et la dérivation par l'intermédiaire des variables a^i coordonnées spatiales de $\mathbf{P}(\tau), \tau$, c'est-à-dire en définitive par l'intermédiaire de τ , fonctions des x^σ en raison de l'équation $c(t - \tau) - \rho = 0$. Nous désignerons par $\frac{d}{d\tau}$ la dérivation totale $\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{d a^i}{d \tau} \frac{\partial}{\partial a^i}$ et par $\frac{d}{d x^\sigma}$ la dérivation totale $\frac{\partial}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma} \frac{d}{d \tau}$. Nous distinguerons de même les opérateurs $\square_c$ et L_c (dérivation partielle), et $\square$ et L (dérivation totale).

Rappelons rapidement les définitions de $U, \mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}$. Si λ est le paramètre de description de la droite a^σ, x^σ défini par les relations :

$$\frac{d x^\sigma}{x^\sigma - a^\sigma} = \frac{d \lambda}{\lambda}$$

$U(x^\sigma; a^\sigma)$ est défini par les équations (2) et (2bis) du chapitre II, c'est-à-dire par :

$$(12) \quad d\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{U}}{\mathbf{U}} = -b_\sigma \frac{d x^\sigma}{d \lambda} d\lambda$$

$\mathcal{U}_0$ est défini par la relation :

$$(13) \quad 4 \frac{d}{d \lambda} \left(\frac{\lambda \mathcal{U}_0}{\mathbf{U}} \right) + \frac{L_0 \mathbf{U}}{\mathbf{U}} = 0$$

et $\mathcal{U}$ par l'équation aux dérivées partielles :

$$(14) \quad L_c \mathcal{U} = 0$$

et la condition $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$ sur le cône caractéristique issu du point a^σ .

Les dérivées de τ sont données par les équations (5) du chapitre I :

$$(15) \quad \frac{\partial \tau}{\partial x^i} = - \frac{x^i - a^i}{D} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{c - \rho}{D}$$

avec :

$$\mathbf{D} = \rho (c - v_p) = c \rho - (x' - \alpha') v^i$$

On sait en outre (équations (7) et (8) du chapitre I) : que :

$$(16) \quad \sum \left(\frac{\delta \tau}{\delta x^i} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\delta \tau}{\delta t} \right)^2 = 0 \quad \left[\tau = - \frac{z}{D} \right]$$

Enfin on vérifiera aisément que :

$$(17) \quad \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta x^i} = c \frac{x^i - \alpha^i}{\rho} - v^i$$

et par suite que :

$$(18) \quad \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta x^i} \frac{\delta \tau}{\delta x^i} = -1$$

Etablissons quelques formules préliminaires. La relation (12) s'écrit aussi, quels que soient les points a^σ et x^σ :

$$(19) \quad \frac{1}{\mathbf{U}} \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta x^\sigma} (x^\sigma - a^\sigma) + h_\sigma (x^\sigma - a^\sigma) = 0$$

les h_σ n'étant fonctions que des x^σ .

Si on fait varier le point a^σ sans modifier le point x^σ et qu'on désigne par δ la variation obtenue, cette équation entraîne :

$$- \frac{\delta \mathbf{U}}{\mathbf{U}} \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta x^\sigma} (x^\sigma - a^\sigma) + (x^\sigma - a^\sigma) \delta \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta x^\sigma} - \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta x^\sigma} \delta a^\sigma - \mathbf{U} h_\sigma \delta a^\sigma = 0$$

En prenant $a^\sigma = a^\sigma(\tau) = \alpha^\sigma$, et en tenant compte de (19), il vient :

$$(20) \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\delta \mathbf{U}}{\delta x^\sigma} \right) (x^\sigma - \alpha^\sigma) + \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} h_\sigma (x^\sigma - \alpha^\sigma) - \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta x^\sigma} \frac{d\alpha^\sigma}{d\tau} - \mathbf{U} h_\sigma \frac{d\alpha^\sigma}{d\tau} = 0$$

Ceci posé, appliquons l'opérateur $\mathbf{L}$ successivement aux deux parties de u_0 . Pour le premier terme, le terme fini, nous partirons de la relation facile à établir :

$$(21) \quad \mathbf{L} \frac{\omega \mathbf{U}}{\mathbf{D}} = \frac{\omega}{\mathbf{D}} \mathbf{L} \mathbf{U} + 2 \left[\frac{d\mathbf{U}}{dx^i} \frac{d}{dx^i} \left(\frac{\omega}{\mathbf{D}} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{\mathbf{D}} \right) \right] - \mathbf{U} \left[\square \frac{\omega}{\mathbf{D}} + 2 h_\sigma \frac{d}{dx^\sigma} \left(\frac{\omega}{\mathbf{D}} \right) \right]$$

dont nous allons expliciter tous les termes. On a d'abord, en remarquant que les opérations $\frac{d}{d\tau}$ et $\frac{\delta}{\delta x^\sigma}$ sont commutatives :

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}_0\mathbf{U} + 2 \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^i} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} \right] + \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} (\square \tau + 2b^\sigma \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma})$$

puis, en tenant compte de (15) et de la seconde équation (16) :

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}_0\mathbf{U} - \frac{2}{\mathbf{D}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^\sigma} \right) (x^\sigma - x^\sigma) - \frac{2}{\mathbf{D}} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \left[1 + h_\sigma (x^\sigma - x^\sigma) \right]$$

ou enfin, en tenant compte de l'équation (20) :

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}_0\mathbf{U} - \frac{2}{\mathbf{D}} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^\sigma} + \mathbf{U} h_\sigma \right) \frac{d\alpha^\sigma}{d\tau} - \frac{2}{\mathbf{D}} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau}$$

Prenons le deuxième terme de (21). En développant les dérivées totales qui y figurent et en tenant compte de la première équation (16) ce terme s'écrit :

$$- \frac{2}{\mathbf{D}^2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} - \frac{2}{\mathbf{D}^2} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} + \frac{2d}{d\tau} \left(\frac{\omega}{\mathbf{D}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^i} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)$$

soit, en se référant aux équations (15) et (17) :

$$- \frac{2}{\mathbf{D}^2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} + \frac{2\omega}{\mathbf{D}^2} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} - \frac{2}{\mathbf{D}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\omega}{\mathbf{D}} \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^\sigma} (x^\sigma - x^\sigma)$$

Passons au troisième terme, $\square \frac{\omega}{\mathbf{D}}$. On trouve en le développant :

$$\square \frac{\omega}{\mathbf{D}} = \frac{1}{\mathbf{D}} \square \omega + 2 \left[\frac{d\omega}{dx^i} \frac{d}{dx^i} \left(\frac{1}{\mathbf{D}} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{d\omega}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathbf{D}} \right) \right] + \omega \square \frac{1}{\mathbf{D}}$$

avec :

$$\square \omega = \frac{d}{dx^i} \left(\frac{d\omega}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\omega}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = \frac{d\omega}{d\tau} \square \tau = - \frac{2}{\mathbf{D}} \frac{d\omega}{d\tau}$$

puis :

$$\frac{d\omega}{dx^i} \frac{d}{dx^i} \left(\frac{1}{\mathbf{D}} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{d\omega}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathbf{D}} \right) = - \frac{1}{\mathbf{D}^2} \frac{d\omega}{d\tau} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} = \frac{1}{\mathbf{D}^2} \frac{d\omega}{d\tau}$$

et enfin :

$$\square \frac{1}{\mathbf{D}} = 0$$

puisque $1/\mathbf{D}$ n'est autre que le potentiel de Liénard-Wiechert du chapitre II, par. 4, pour $\omega(\theta) = 1$. Il résulte de ces égalités successives que :

$$\square \frac{\omega}{\mathbf{D}} = 0$$

Enfin le dernier terme de (21) s'écrit :

$$\begin{aligned} 2 \mathbf{U} b^\sigma \frac{d}{dx^\sigma} \left(\frac{\omega}{\mathbf{D}} \right) &= -2 \frac{\omega}{\mathbf{D}^2} \mathbf{U} b^i \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} + 2 \mathbf{U} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\omega}{\mathbf{D}} \right) b^\sigma \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma} \\ &= -2 \frac{\omega}{\mathbf{D}^2} \mathbf{U} b^i \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} - \frac{2}{\mathbf{D}} \mathbf{U} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\omega}{\mathbf{D}} \right) b_\sigma (x^\sigma - x^\sigma) \end{aligned}$$

Il vient en définitive, en rassemblant tous les termes non nuls du second membre de (21) :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \frac{\omega \mathbf{U}}{\mathbf{D}} &= \frac{\omega}{\mathbf{D}} \mathbf{L}_0 \mathbf{U} - \frac{2}{\mathbf{D}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\omega}{\mathbf{D}} \right) \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^\sigma} + \mathbf{U} b_\sigma \right] (x^\sigma - x^\sigma) \\ &\quad - \frac{2}{\mathbf{D}^2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^\sigma} + \mathbf{U} b_\sigma \right) \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^i} + \mathbf{U} b_i \right) \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} \right] \end{aligned}$$

ou encore, en tenant compte des relations $\frac{dx^i}{d\tau} = v^i$, $\frac{dx^4}{d\tau} = 1$, et des équations (17) et (19) :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \frac{\omega \mathbf{U}}{\mathbf{D}} &= \frac{\omega}{\mathbf{D}} \mathbf{L}_0 \mathbf{U} - \frac{2}{\mathbf{D}^2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^i} + \mathbf{U} b_i \right) c \frac{x^i - x^i}{\rho} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} b_4 \right] \\ &= \frac{\omega}{\mathbf{D}} \mathbf{L}_0 \mathbf{U} - \frac{2}{\mathbf{D}^2} \frac{\omega}{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^\sigma} + \mathbf{U} b_\sigma \right) (x^\sigma - x^\sigma) \\ &= \frac{\omega}{\mathbf{D}} \mathbf{L}_0 \mathbf{U} \end{aligned}$$

Considérons maintenant le second terme de u_0 , en laissant de côté pour un instant le coefficient -2 et en désignant par ψ l'intégrale. L'application à ψ de l'opérateur $\mathbf{L}$ va donner naissance à deux sortes de termes : ceux qu'on obtient par dérivation sous le signe $\int$, et ceux qu'on obtient par dérivation par rapport à la borne supérieure. On a pour les dérivées premières :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} = \int_{\theta_0}^{\tau} \omega(\theta) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^\sigma} [x^\sigma, \mathbf{P}(\theta), \theta] d\theta - \omega(\tau) \mathcal{U} [x^\sigma, \mathbf{P}(\tau), \tau] \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma}$$

la fonction $\mathcal{U}$ sous le signe $\int$ ne dépendant pas de τ . Dans le calcul des dérivées secondes et par la formation de $\mathbf{L}$, les termes sous le signe $\int$ vont donner, au total ;

$$\int_{\theta_0}^{\tau} \omega(\theta) \mathbf{L}_0 \mathcal{U} d\theta$$

quantité nulle d'après l'équation (14). D'autre part, pour $\theta = \tau$, u est égal à u_0 , et $\frac{\partial u}{\partial x^\sigma}$ est égal à $\frac{\partial u_0}{\partial x^\sigma}$, ainsi qu'on s'en rend compte après l'équation (15bis) du chap. III, dans laquelle on doit faire $\Gamma = 0$ après dérivation. Les termes provenant de la dérivation par rapport à la borne supérieure de l'intégrale vont donc donner, dans la formation de L :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx^i} \left[\omega(\tau) u_0 \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left[\omega(\tau) u_0 \frac{\partial \tau}{\partial t} \right] \\ & + \omega(\tau) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x^i} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right] + 2 \omega(\tau) u_0 b^\sigma \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, après développement des dérivées totales :

$$\begin{aligned} & \omega(\tau) u_0 \square \tau + 2 \omega(\tau) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x^i} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + 2 \omega(\tau) u_0 b^\sigma \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma} = \\ & - \frac{2 \omega}{D} u_0 - \frac{2 \omega}{D} \lambda \frac{d u_0}{d \lambda} + \frac{2 \omega}{D} \frac{\lambda}{U} \frac{d U}{d \lambda} u_0 = - \frac{2 \omega}{D} U \frac{d}{d \lambda} \left(\frac{\lambda u_0}{U} \right) \end{aligned}$$

La dernière expression est, d'après l'équation (13), égale à $\frac{\omega}{2 D} L_0 U$.
On aura donc :

$$L u_0 = L \frac{\omega U}{D} - 2 L \int_{\theta_0}^{\tau} \omega u d\theta = 0$$

La fonction u_0 donnée par l'équation (11) est donc bien solution de (E) .

Il est visible que la méthode qui nous a permis de calculer u_0 à partir des données de u_r sur la courbe L est la même que celle qui nous a permis de calculer la fonction μ dans le chapitre précédent, à ceci près que la courbe sur laquelle était donnée μ était l'axe des t , cas particulier d'une courbe L . La vérification de l'équation $L \frac{\mu}{r} = 0$ annoncée au chapitre II, par. 1bis in fine, est ainsi faite.

Unicité de la forme (11) de u_0 .

Supposons qu'en utilisant pour surface Φ une surface (déformable si l'on veut) autre que la sphère on ait obtenu une forme analytique de u_0 différente de la décomposition définie par les équations (9) et (10).

Reportons-nous alors aux équations (2) et (3) qui fournissent les éléments différentiels sur le tube T . On voit sans peine que, à condition que Φ soit soumise à certaines restrictions (son plan tangent ne passe jamais par P , les dérivées de sa normale par rapport à θ sont bornées, etc...), les intégrales sur T ont une limite lorsque Φ se déduit à P . Quant aux intégrales sur Ω elles ont également une limite comme on peut s'en apercevoir en reproduisant les calculs faits plus haut à leur sujet ; on pourrait même montrer directement que cette limite est la même que lorsque Φ est une sphère ; sans faire cette démonstration, désignons par G la limite de ces intégrales sur Ω . On obtient alors pour $u(x^\sigma)$ une expression de la forme :

$$(22) \quad 2 \pi u(x^\sigma) = \frac{\varphi(\tau) U}{\rho(c - v_p)} - 2 \int_{\theta_0}^{\tau} \psi(\theta) u d\theta + G + \left[\frac{x^i - x^i}{\rho} \phi_i(\tau) + \chi(\tau) \right] \frac{U}{\rho(c - v_p)}$$

le dernier terme en U provenant de l'intégrale de $\frac{du}{d\theta}$ dont on ne peut plus affirmer la nullité.

Egalons cette expression à celle qui provient des équations (9) et (10). Nous devons d'abord évaluer les coefficients de $1/\rho$ pour conserver l'égalité lorsque ρ tend vers zéro. U n'étant jamais nul, il en résulte :

$$\varphi(\tau) + \psi_i(\tau) \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{x^i - \sigma^i}{\rho} + \chi(\tau) = \sigma(\tau)$$

et, comme $\frac{x^i - \sigma^i}{\rho}$ a une limite dépendant de la direction PM , cette égalité entraîne :

$$\varphi(\tau) + \chi(\tau) = \sigma(\tau)$$

$$\psi_i(\tau) = 0 \quad \text{quel que soit } \tau$$

Ecrivons maintenant que $Lu = 0$, u étant donné par l'équation (22). Grâce au calcul qui vient d'être effectué cette condition s'écrit :

$$Lu = \frac{\varphi(\tau) + \chi(\tau)}{\rho(c - v_p)} L_0 U - \frac{v(\tau)}{\rho(c - v_p)} L_0 U = \frac{\sigma(\tau) - v(\tau)}{\rho(c - v_p)} L_0 U = 0$$

Or, comme nous l'avons vu au chapitre II, par. 3bis, $L_0 U$, dans le cas où les coefficients b^σ ne sont pas nuls, n'est pas nul non plus lorsque x^σ est voisin de σ^σ . Il en résulte $\sigma(\tau) = v(\tau)$ quel que soit τ . Le raisonnement n'est en défaut que si $b^\sigma = 0$ et si $k = 0$, l'opérateur L se réduisant à $\square$ et $\square U$ étant nul ; mais dans ce cas la fonction U est nulle et il n'y a plus lieu de se préoccuper de la fonction v .

La décomposition définie par les équations (9) et (10) est donc bien unique.

Limite de la forme (11) lorsque θ_0 tend vers $-\infty$.

L'équation (11) est valable tant que le point $x^\sigma(M, t)$ est intérieur au cône Ω issu de $P(\theta_0), \theta_0$, c'est-à-dire intérieur à la partie postérieure du cône caractéristique issu de ce point ; une telle position est définie pour des valeurs négatives de la fonction Γ et de $\theta_0 - t$. Si le point M, t sort du domaine ainsi défini, par exemple si t devient inférieur à θ_0 , l'équation (11) n'a plus aucun sens ; mais il est facile de lui en redonner un en diminuant autant qu'il est nécessaire la quantité θ_0 . On voit ainsi que, si l'on veut pouvoir représenter u par une expression telle que (11) dans tout l'espace-temps, il faut rendre la borne inférieure infinie négative.

Dans ce passage à la limite on doit simplement s'assurer de la convergence de l'intégrale figurant dans u ; nous avons traité cette question au chapitre II, par. 6.

Il faut néanmoins remarquer que l'expression (11) admise sans modification peut continuer à représenter une solution singulière, d'un type toutefois un peu particulier. Il faut en effet dans ce cas adopter une convention pour définir $u(M, t)$ lorsque M, t est extérieur au cône Ω . Cette convention peut revêtir des formes variables. Une de celles qui présente le plus d'intérêt physique est la suivante ; elle consiste à supposer que ω est nul pour $\theta_0 > \theta > -\infty$. La fonction u est alors nulle en dehors de $\Omega \cdot \mathcal{U}$

représente, dans l'espace-temps, un front d'onde sur lequel se place une discontinuité du 1er, ou du 2ème, etc... ordre, suivant que $\omega(\theta_0) = 0$, ou $\omega(\theta_0) = \frac{d\omega}{d\theta}(\theta_0) = 0$, etc... Physiquement cela revient à supposer que le corpuscule, sans effet physique jusqu'à l'instant θ_0 , se met à rayonner à partir de cet instant.

Singularité linéaire d'ordre logarithmique

Nous irons un peu plus rapidement dans les démonstrations qui vont suivre, les points délicats ayant été élucidés dans ce qui précède et le principe de leur résolution restant acquis.

Soit l la ligne singulière à l'instant θ (ligne qui peut être ouverte ou fermée, mais qui reste de longueur finie et bornée) et Λ la surface (à deux dimensions) décrite dans l'espace-temps par $l(\theta)$. Λ peut aussi bien être considérée comme engendrée par la famille de trajectoires afférentes à chaque point de la ligne singulière l . Cette famille dépend d'un paramètre, que nous désignerons pas s , L_s étant la trajectoire correspondante, et nous écrirons $P(s, \theta)$ la position spatiale à l'instant θ du mobile qui décrit la trajectoire L .

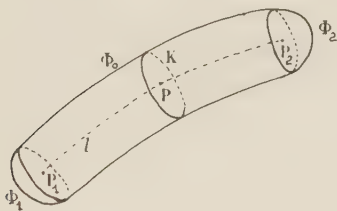


fig. 3

Nous prendrons pour surface Φ de l'espace enfermant la ligne singulière l à chaque instant celle qui se compose d'un tube Φ_0 décrit par un cercle K centré en P , de plan normal à l en P , et de rayon constant R , et, dans le cas où l est une courbe ouverte, de deux demi-sphères Φ_1 et Φ_2 de rayon R ayant pour centres respectifs les extrémités P_1 et P_2 de l .

On peut prendre pour coordonnées curvilignes $\xi_1 \xi_2$ d'un point A de Φ_0 , d'une part la valeur du paramètre s définissant le point P sur le cercle duquel se trouve A , et d'autre part l'angle φ que la normale principale $\vec{n}$ en P à l fait avec PA , compté autour de la tangente à l orientée dans le sens des s croissants. En désignant par $\vec{b}$ la conormale à l , on exprimera ainsi A à partir de P :

$$A(s, \varphi) = P(s) + R(\vec{n} \cos \varphi + \vec{b} \sin \varphi)$$

La vitesse de A (prise à $\xi_1 \xi_2$ constants) est, on peut le voir facilement grâce à cette équation, fonction linéaire de la vitesse de P et de ses dérivées premières et secondes par rapport à s , de la courbure de l et de sa dérivée première par rapport à θ , et enfin, si on désigne par σ l'abscisse curviligne sur l , de $\frac{ds}{d\sigma}$ et $\frac{d}{d\theta}(\frac{ds}{d\sigma})$. Si ces différentes quantités sont bornées, ce dont la signification géométrique est claire, la vitesse de A est, pour R suffisamment petit, assez proche de celle de P pour que l'on ait $v(A) \leq \omega' < c$ dès que $v(P) \leq \omega < c$.

Sur les sphères Φ_1 et Φ_2 on prendra des coordonnées polaires ordinaires orientées autour des tangentes respectives en P_1 et P_2 ; on n'aura plus ici, comme dans le cas de la singularité ponctuelle, un déplacement de ces sphères par translation seule, mais la rotation due à la déformation de l n'affectera pas l'inégalité $v(A) \leq \omega'$.

On voit géométriquement d'autre part que la normale à Φ_0 en A est dirigée suivant la droite PA , et que par suite sa dérivée par rapport à θ est bornée en

vertu des hypothèses qui viennent d'être faites. Il en sera de même pour les dérivées de la normale aux divers points de Φ_1 et de Φ_2 .

Enfin on calcule aisément l'élément de surface de Φ_c ; en désignant par ρ le rayon de courbure de l , supposé non nul, cet élément de surface s'écrit :

$$H ds d\varphi = R \left(1 - \frac{R}{\rho} \cos \varphi \right) \left| \frac{d\sigma}{ds} \right| ds d\varphi$$

expression toujours positive dès que R est assez petit, et du même ordre d'infinitude que R ; cette dernière affirmation vaut aussi pour $\frac{\delta H}{\delta \theta}$. Sur Φ_1 et Φ_2 l'élément de surface est de l'ordre de R^2 , de même que sa dérivée par rapport à θ .

Considérons alors les diverses intégrales d'Hadamard. Dans l'intégrale sur Σ_2 , α est une quantité bornée d'après les considérations qui précèdent. u étant de l'ordre de $\log R$, l'intégrale de αu tend vers zéro avec R .

L'intégrale de $\frac{du}{dv}$ sur Σ_2 , par contre, tend vers une limite qui est en général différente de zéro. Considérons d'abord un point $P(s, \theta)$, θ de la ligne singulière non situé aux extrémités, correspondant à une valeur de s fixée; soit K_s son cercle à chaque instant et Q_s le tube à deux dimensions décrit par K_s dans l'espace-temps. L'intersection de Q_s et de Γ est une courbe de Σ_2 . Pour chaque point A de cette courbe, de temps θ , nous pouvons remplacer les coordonnées de A, θ dans U et $r(c - v_r)$ par les coordonnées du point $P(s, \theta)$, θ centre du cercle K_s . Ce faisant on commet sur ces deux fonctions une erreur de l'ordre de R . On peut ensuite remplacer $P(s, \theta)$, θ par $P(s, \tau)$, τ , intersection de Γ avec la trajectoire L_s . L'erreur commise est encore de l'ordre de R . Après multiplication par $\frac{du}{dv}$ l'erreur résultante est finie et son intégrale après multiplication par $\sqrt{c^2 + v_n^2} H$ est de l'ordre de R . En négligeant cette erreur l'intégrale en $\frac{du}{dv}$ s'écrit :

$$-\int ds \frac{U}{2r(c - v_r)} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dv} \sqrt{c^2 + v_n^2} H d\varphi$$

U et $r(c - v_r)$ étant évalués au point $P(s, \tau)$, τ , et H étant évalué au point A, θ de Σ_2 . Cette distinction n'a aucune influence sur le fait que l'intégrale en $d\varphi$ a une limite lorsque R tend vers zéro, limite en général non nulle, puisque $\frac{du}{dv}$ est de l'ordre de $1/R$ et que H est de l'ordre de R . Soit $-2\sigma(s, \tau)$ cette limite, τ étant une fonction, non seulement de s mais aussi de s . L'intégrale double a pour limite :

$$\int_{s_1}^{s_2} \sigma(s, \tau) \frac{U[x^0; P(s, \tau), \tau]}{r(\tau)[c - v_r(\tau)]} ds$$

s_1 et s_2 correspondant aux points P_1 , P_2 .

L'intégrale de $\frac{du}{dv}$ sur la partie de Σ_2 qui correspond aux deux demi-sphères Φ_1 et Φ_2 a une limite nulle puisque les surfaces de ces demi-sphères sont de l'ordre de R^2 . La limite de l'intégrale de $\frac{du}{dv}$ sur Σ_2 se réduit donc à la quantité précédente.

Enfin on démontrerait, de même que dans le cas de la singularité ponctuelle, que l'intégrale du terme en $\frac{du}{d\theta}$ a une limite nulle. Il suffirait pour cela de reprendre l'équation : $\frac{du}{d\theta}(A) = \frac{\delta u}{\delta \theta}(A) + \frac{\delta u}{\delta a^i} v^i(A)$, dont le terme en $1/R$ disparaît, $v(A)$ et $v(\nu)$

ayant une différence de l'ordre de R .

Passons maintenant à l'intégrale sur S_2 . En choisissant convenablement l'ordre des intégrations, d'abord en φ , puis en θ , puis en s , on voit facilement que cette limite s'écrit :

$$- 2 \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_0(s)}^{\tau(s)} \sigma(s, \theta) \mathcal{U}[x^\sigma, v(s, \theta), \theta] d\theta$$

la fonction σ étant la même que ci-dessus et $\theta_0(s)$ étant la cote de l'intersection de la trajectoire L_s avec le cône Ω .

Enfin, si on passe aux intégrales sur Ω , on remarque que la seule différence avec ce qui se passe dans le cas de la singularité ponctuelle est que le champ d'intégration comporte une ligne singulière, l'intersection de Λ et de Ω . On voit aisément que cette petite difficulté supplémentaire n'empêche pas la limite d'exister, ni la fonction $F(x^\sigma)$ obtenue d'être régulière sauf sur l'intersection de Λ et de Ω ; cette fonction F vérifie l'équation (E).

Laissant de côté dès maintenant cette fonction F nous prendrons pour expression de la solution singulière u_0 celle qui est donnée par l'équation (on reprend les notations du chapitre II) :

$$(23) \quad u_0 = \int_{s_1}^{s_2} \omega(s, \tau) \frac{U}{\rho(r, v_p)} ds - 2 \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_0(s)}^{\tau(s)} \omega(s, \theta) \mathcal{U} d\theta$$

On remarque immédiatement que cette expression est l'intégrale par rapport à s de l'expression que nous avons trouvée pour la singularité ponctuelle. C'est donc celle-ci qui, pour des lignes singulières de position quelconque par rapport à la trajectoire de leurs points constitutifs, fournit la forme analytique de base. Mais nous allons voir que, dans un cas particulier, c'est au contraire la solution à singularité linéaire qui peut fournir la forme analytique de base plus simplement que la singularité ponctuelle.

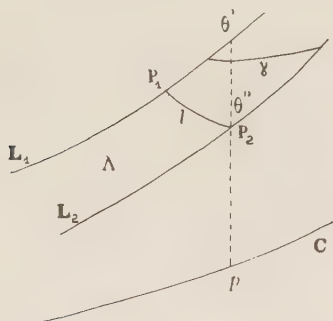


fig. 4

Ce cas particulier est le suivant : à chaque instant, la ligne singulière l , considérée dans l'espace, coïncide avec une portion de la trajectoire spatiale de ses différents points. Nous reprendrons la notation C pour cette trajectoire spatiale. C est décrite dans l'espace par la variation d'un certain paramètre θ , que nous pourrions substituer à s ; de la sorte, l'expression (23) de u_0 se rapproche de la forme (3) que nous avons prise au chapitre I pour le potentiel de ligne. Nous allons voir que l'on peut identifier complètement ces deux formes.

Considérons la bande d'espace-temps Λ engendrée par la ligne singulière $l(\theta)$; les points P, θ de cette variété à deux dimensions sont des fonctions $P(s, \theta), \theta$ des deux variables s et θ . La projection de Λ dans l'espace est la ligne C .

Considérons, à l'instant θ , les deux extrémités de $l(\theta)$ et leurs projections sur C . Lorsque θ varie, ces deux projections se déplacent dans un certain sens

qui définit le mouvement sur C . Il est évident géométriquement que, si les vitesses des différents points de l ne s'annulent pas, celle des projections qui est en tête dans le mouvement sur C à un instant donné le reste à tout instant. C'est l'extrémité correspondante de l que nous désignerons par P_2 , P_1 étant l'autre ; $P_1(\theta)$ et $P_2(\theta)$ décrivent les trajectoires d'espace-temps L_1 et L_2 .

Etant donné un point p de C , nous prendrons pour paramètre $\bar{\theta}$ lui correspondant dans la description de la courbe C la cote θ du point P_2 dont p est la projection, c'est-à-dire la cote de l'intersection de L_2 avec la verticale passant par p . $\bar{\theta}$ est une fonction des paramètres s et θ qui définissent Λ , fonction qui doit rester constante lorsque s et θ varient de telle sorte que $P(s, \theta)$, θ se déplace sur une verticale ; autrement dit on doit avoir :

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s} ds + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} d\theta = 0$$

dès que :

$$\frac{\partial a'}{\partial s} ds + \frac{\partial a'}{\partial \theta} d\theta = 0$$

Il en résulte pour $\bar{\theta}$ les trois équations aux dérivées partielles :

$$(24) \quad \frac{\partial a'}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s} = \frac{\partial a'}{\partial s} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta}$$

Considérons maintenant la courbe γ , intersection de Λ et du cône Γ issu d'un point donné M, t . Sur γ , θ prend les valeurs que nous appelons τ , qui varient en fonction de s (et aussi de x^σ , mais nous supposons ce dernier point fixé) ; la dérivée $\frac{d\tau}{ds}$ s'obtient à partir de l'équation $c(t - \tau) - \rho = 0$, dont la différenciation donne :

$$-c d\tau - \frac{\partial \rho}{\partial \tau} d\tau - \frac{\partial \rho}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial s} ds = 0$$

c'est-à-dire :

$$(c - v_p) \frac{d\tau}{ds} = \frac{x' - a'}{\rho} \frac{\partial a'}{\partial s}$$

soit encore, d'après l'équation (24) :

$$(25) \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} (c - v_p) \frac{d\tau}{ds} = \frac{x' - a'}{\rho} \frac{\partial a'}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s} = v_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s}$$

τ étant fonction de s , $\bar{\theta}(s, \theta)$ devient sur γ une fonction de la seule variable s , dont la différentielle est alors donnée par :

$$(26) \quad d\bar{\theta} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s} ds + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \theta} \frac{d\tau}{ds} ds = \frac{c}{c - v_p} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s} ds$$

Revenons à l'intégrale simple de (23) et prenons-y $\bar{\theta}$ comme variable d'intégration au lieu de s . Les arguments de U sont, outre x^σ , les coordonnées spatiales de $P(\tau)$, c'est-à-dire les coordonnées spatiales de $p(\bar{\theta})$, et $\tau = t - \frac{pM}{c}$. En remplaçant ds par son expression en fonction de $d\bar{\theta}$ tirée de (26), la quantité $c \cdot \nu_p$ disparaît du dénominateur de l'intégrale, et ω est remplacée par $\omega / \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s}$. Cette fonction dépend de s et de τ , ou encore de $\bar{\theta}$ et de θ si on tire s en fonction de $\bar{\theta}$ et θ de l'équation $\bar{\theta} = \bar{\theta}(s, \theta)$. Posons :

$$\nu(\bar{\theta}, \theta) = \frac{\omega}{\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s}}(\bar{\theta}, \theta + \bar{\theta})$$

l'intégrale simple de (23) s'écrit :

$$\frac{1}{c} \int_{\theta_1}^{\tau_2} \nu(\bar{\theta}, t - \bar{\theta} - \frac{pM}{c}) \frac{U[x^\sigma, p(\bar{\theta}), t - \frac{pM}{c}]}{pM} d\theta$$

τ_2 étant la quantité τ pour la trajectoire L_2 , et θ_1 la valeur du paramètre $\bar{\theta}$ pour la projection du point $P_1(\tau_1)_{\tau_1}$.

Considérons maintenant l'intégrale double de (23), et prenons-y comme variables d'intégration $\bar{\theta}$ et θ au lieu de s et θ . On aura :

$$ds d\theta = \left(1 / \frac{D(\bar{\theta}, \theta)}{D(s, \theta)}\right) d\bar{\theta} d\theta = \left(1 / \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s}\right) d\bar{\theta} d\theta$$

quantité qu'on peut toujours supposer positive, au besoin en changeant le signe de s et dont il est évident géométriquement qu'elle n'est ni nulle ni infinie. En permutant les intégrations, l'intégrale double s'écrit :

$$\int_{\theta_0(s_1)}^{\tau_2} d\bar{\theta} \int_{\theta''}^{\theta'} \frac{\omega}{\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial s}}(\bar{\theta}, \theta) U[x^\sigma, p(\bar{\theta}), \theta] d\theta$$

θ'' et θ' étant les cotes des points situés sur L_2 et L_1 à la verticale de $p(\bar{\theta})$; on a : $\theta'' = \bar{\theta}$. En posant $\theta = \bar{\theta} + \alpha$ l'intégrale double s'écrit encore :

$$\int_{\theta_0(s_1)}^{\tau} d\bar{\theta} \int_0^{\theta' - \bar{\theta}} \nu(\bar{\theta}, \alpha) U[x^\sigma, p(\bar{\theta}), \bar{\theta} + \alpha] d\alpha$$

La fonction $\nu(\bar{\theta}, \alpha)$ n'intervient, pour chaque valeur de $\bar{\theta}$, que pour des valeurs de α comprises entre 0 et $\theta' - \bar{\theta}$; on peut achever de la définir en posant $\nu = 0$ pour $\alpha > \theta' - \bar{\theta}$. Le point $P(\theta'), \theta'$ étant intérieur au cône Γ , sauf sur la courbe γ pour laquelle il est sur Γ , on a toujours $t - \theta' - \frac{pM}{c} \geq 0$, d'où l'on déduit : $t - \bar{\theta} - \frac{pM}{c} \geq \theta' - \bar{\theta}$. On peut donc remplacer la borne supérieure de l'intégrale en α par $t - \bar{\theta} - \frac{pM}{c}$, et on voit alors que l'expression (23) des singularités linéaires est identique à celle qui a été trouvée par induction au chapitre II, équation (1). Cette dernière équation fournit donc bien la forme générale de ces singularités.

Singularités superficielles

Il est possible, à partir de l'expression (11) des solutions à singularité ponctuelle, de construire des solutions à "singularité" superficielle en faisant dépendre

les trajectoires L , non plus d'un paramètre comme dans le cas des singularités linéaires, mais de deux. A chaque instant le lieu des singularités possibles est alors une surface d'espace.

La théorie du potentiel newtonien de surface montre immédiatement que l'ordre des singularités est abaissé : la fonction u et ses dérivées premières sont en effet définies de chaque côté de la surface ; on n'observe de quantités infinies qu'à partir des dérivées secondes.

La forme ainsi obtenue de la fonction u n'est pas sans intérêt ; elle permet en effet de remplacer la singularité ponctuelle par une région "singulière" où, en réalité, il n'y a pas d'infini mathématique, mais où la fonction d'onde conserve l'allure en aiguille qu'on lui souhaitait du point de vue physique.

L'étude qui précède peut être évidemment appliquée à ces sortes de singularités.

Singularités polaires d'ordre supérieur.

Reportons-nous aux expressions (2), (3) et (4) qui donnent les éléments d'intégrale sur S_2 et Ω , et plaçons-nous, pour fixer les idées dans le cas d'une singularité ponctuelle.

Si l'ordre du pôle est supérieur à 1, les éléments qui figurent dans ces expressions ne donnent plus lieu à des intégrales absolument convergentes ; pour un pôle d'ordre 2 par exemple, les termes en $\frac{du}{dv}$ sont, en général, en $\frac{1}{R^3}$. On peut néanmoins espérer une semi-convergence des intégrales, et c'est en fait ce qui doit se produire si la fonction u recherchée existe.

Les fonctions singulières prennent, dès le pôle d'ordre 2 pour la singularité ponctuelle et le pôle d'ordre 1 pour la singularité linéaire, des expressions longues et compliquées, dont il ne semble pas, du moins pour l'instant, qu'elles présentent un grand intérêt physique. Nous noterons cependant à leur sujet qu'il est possible de formuler des hypothèses assurant la semi-convergence des intégrales. On peut même se rendre compte, à partir des expressions (2), (3) et (4), que les éléments d'intégrale peuvent s'obtenir, à partir d'éléments d'ordre d'infinitude inférieur, par la somme d'une variation de la trajectoire L (c'est-à-dire par dérivation par rapport aux a^σ) et d'une dérivation par rapport à l'une des variables x^σ .

Chapitre IV. - FORMULE DU GUIDAGE. - APPLICATIONS

1. - DEFINITION DES LIGNES DE GUIDAGE

Les équations du guidage, introduites en 1927 par M.L. de Broglie (i), définissent, sur une solution donnée de l'équation d'onde, des lignes particulières qui possèdent, comme on le verra dans ce chapitre et le suivant, la double propriété d'être des trajectoires de singularités et d'être des lignes de raccordement de deux solutions différentes de l'équation d'onde.

Soit $u = f e^{i\varphi}$ une solution de l'équation (E) :

$$(E) \quad \square u - 2b^\sigma \frac{\partial u}{\partial x^\sigma} - ku = 0$$

Les lignes de guidage sont définies par les équations différentielles :

$$\frac{dx^i}{\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \gamma^i} = \frac{dt}{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^4}$$

Ces équations, et la donnée des x^i à l'instant $t = 0$ définissent une ligne de guidage et une seule. La vitesse spatiale v^i sur la ligne de guidage obéit aux équations :

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \gamma^i = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^4 \right) v^i$$

Les quatre dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}$ peuvent, sur une ligne de guidage, s'exprimer en fonction des coefficients γ^σ et de la dérivée totale le long de cette ligne : $\frac{d\varphi}{dt} = v^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

On trouve facilement :

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \gamma^i = -\frac{1}{c^2 - v^2} \left[\frac{d\varphi}{dt} + \gamma_k v^k + \gamma_4 \right] v^i$$

$$(3) \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^4 = -\frac{1}{c^2 - v^2} \left[\frac{d\varphi}{dt} + \gamma_k v^k + \gamma_4 \right]$$

Nous définirons tout de suite les lignes de guidage pour l'équation généralisée :

$$(G) \quad g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + 2b^\sigma \frac{\partial u}{\partial x^\sigma} - ku = 0$$

les $g^{\rho\sigma}$ étant les coefficients (réels) d'une métrique d'espace-temps qui définit une forme simplement hyperbolique, quelconque à part cela. Le but de cette notation générale est double : contribuer à une généralisation, d'ailleurs facile, de la formule du guidage, et surtout abréger les écritures pour certaines démonstrations (en particulier au chapitre V).

Les lignes de guidage relatives à une solution $u = f e^{i\varphi}$ de l'équation (G) seront définies par les équations différentielles :

$$(4) \quad \frac{dx^\rho}{g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho} = d\lambda$$

Ces lignes définissent un vecteur impulsion de l'espace-temps :

$$u^\rho = \frac{dx^\rho}{d\lambda} = g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho$$

et un vecteur vitesse de l'espace :

$$v^i = \frac{u^i}{u^4} = \frac{g^{i\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^i}{g^{4\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^4}$$

On pourrait, comme dans le cas de l'équation (E), exprimer les dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}$ en fonction de v^i , de $\frac{d\varphi}{dt}$, et des composantes du champ contre-variantes γ^ρ et covariantes $\gamma_\rho = g_{\rho\sigma} \gamma^\sigma$.

On remarquera que seule la phase, par l'intermédiaire de ses dérivées, intervient dans la définition des lignes de guidage. Il importe donc peu que l'amplitude soit régulière ou singulière ; seule est exigée la régularité de la phase (ou tout au moins une condition de Lipschitz sur ses dérivées).

La formule du guidage constitue l'extrapolation, en dehors du domaine de l'Optique géométrique (c'est-à-dire de la Mécanique classique) de la formule $\vec{v} = - \text{grad } S$ de la théorie de Jacobi", selon les termes de M. L. de Broglie.

2. - DEMONSTRATION GENERALE DE LA FORMULE DU GUIDAGE POUR LES SOLUTIONS SINGULIERES.

Lorsque la solution u de l'équation d'onde (E) comporte une singularité d'amplitude, le théorème du guidage affirme que cette singularité suit une ligne de guidage de la phase de cette solution.

M. L. de Broglie a donné de ce théorème (i) une démonstration qui, en l'absence de la connaissance des formes analytiques des solutions singulières,

reposait sur plusieurs hypothèses concernant le comportement de la phase et de l'amplitude au voisinage de la singularité. Nous ne reproduirons pas ici cette démonstration que l'on trouvera dans les ouvrages cités ; nous nous contenterons seulement d'en énoncer les hypothèses.

On admet qu'il existe des solutions singulières à singularité ponctuelle (dans l'espace) telle que ;

a/ à chaque instant l'amplitude f tend vers l'infini lorsqu'on approche du point singulier, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x^\sigma}$ étant elles-mêmes infiniment grandes par rapport à f , et du même ordre d'infinitude entre elles ;

b/ la phase, ses dérivées premières et la combinaison $\square\varphi$ de ses dérivées secondes sont définies et continues au point singulier et dans son voisinage ;

c/ une surface fermée infiniment petite d'équation $f = \text{Cte}$ entourant la singularité (de telles surfaces existent) peut être considérée comme se déplaçant, en chacun de ses points, avec une vitesse infiniment voisine de celle du point singulier.

Moyennant ces hypothèses, on démontre bien que le point singulier suit une ligne définie par (1).

La connaissance de la forme analytique des solutions singulières, que nous avons acquise aux précédents chapitres, doit maintenant nous permettre, soit de légitimer les hypothèses qui viennent d'être énumérées, soit de nous affranchir de celles d'entre elles qui seraient superflues. Nous devons naturellement distinguer deux cas, suivant que nous avons affaire à une singularité ponctuelle ou à une singularité linéaire.

3.- SINGULARITE PONCTUELLE. PHASE ET GUIDAGE

Reprenons la forme générale d'une singularité ponctuelle, telle qu'elle a été obtenue au chapitre II, équation (5) :

$$(5) \quad u(x^\sigma) = \frac{\omega(\tau) U(x^\sigma; a^\sigma)}{\rho(c - v_p)} - 2 \int_{-\infty}^{\tau} \omega(\theta) U[x^\sigma; a^\sigma(\theta)] d\theta$$

A partir de cette expression on démontre que :

1°/ La phase φ est définie en tout point de l'espace-temps, y compris sur la ligne écrite par le point singulier $A(t)$, t ; en ce point φ est égale à $\zeta(t)$, ζ étant la phase de ω .

2°/ Les dérivées premières de la phase sont définies en tout point de l'espace-temps, y compris sur la ligne singulière, si la fonction complexe $\omega = \Omega e^{i\zeta}$ vérifie l'équation intégrale :

$$(6) \quad \frac{1}{c^2 - v^2} \left[\frac{d\zeta}{dt} + \gamma_i v^i + \gamma_4 \right] + \Im \left\{ \frac{1}{\omega(t)} \int_{-\infty}^t \omega(\theta) \mathcal{U}(t; \theta) d\theta \right\} = 0$$

dans laquelle :

les fonctions qui figurent au premier terme sont prises au point $A(t), t$;

$\mathcal{U}(t; \theta)$ désigne la fonction $\mathcal{U}[a^i(t), t; a^i(\theta), \theta]$: c'est la valeur de $\mathcal{U}$ pour deux points x^σ et a^σ choisis sur L ;

$\Im$ signifie : partie imaginaire de ...

Lorsque cette équation est satisfaite, les dérivées de la phase sont données par les équations (2) et (3), où $\frac{d\varphi}{dt}$ doit être remplacée par $\frac{d\zeta}{dt}$, remplacement qui s'impose d'ailleurs avec évidence puisqu'on a $\varphi = \zeta$ sur la trajectoire L .

3°/ Les dérivées secondes de la phase sont finies au point singulier, quoique dépendant en général de la direction suivant laquelle on tend vers le point singulier, à condition que l'équation (6) soit vérifiée.

4. - RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE (6).

Si on désigne par $\epsilon(t; \theta)$ la phase de $\mathcal{U}$, par Y son module, et qu'on explicite la phase ζ et le module Ω de ω , l'équation (6) s'écrit :

$$(7) \quad \frac{1}{c^2 - v^2} \left(\frac{d\zeta}{dt} + \gamma_i v^i + \gamma_4 \right) + \frac{1}{\Omega(t)} \int_{-\infty}^t \Omega(\theta) Y(t; \theta) \sin[\epsilon(t; \theta) + \zeta(\theta) - \zeta(t)] d\theta = 0$$

L'existence des solutions de cette équation pose un problème qui semble assez difficile à résoudre dans sa généralité, et qui nécessiterait à lui seul un important développement. Aussi nous bornerons-nous aux quelques indications suivantes.

La trajectoire C étant donné, on peut considérer l'équation (7), soit comme une équation en $\zeta(t)$, $\Omega(t)$ étant alors supposé connu, soit inversement, $\zeta(t)$ étant donné, comme une équation en $\Omega(t)$. On peut également, $\zeta(t)$ et $\Omega(t)$ étant donnés, la considérer comme déterminant la trajectoire. Suivant les cas, on se trouve en présence d'une équation intégrale ou d'équations intégral-différentielles de Volterra.

Les unes et les autres ressortent de types peu ou pas étudiés jusqu'à présent, et leur résolution est compliquée par l'intervention de trois facteurs : la non-linéarité (tout au moins pour deux d'entre elles), la limite inférieure infinie, et le comportement assez particulier du noyau $K(t, \theta)$ qui, bien qu'intégrable, est tel que

$$\int_{-\infty}^t \mathbf{K}(t; \theta) d\theta$$

ne tend pas vers zéro lorsque t tend vers $-\infty$, comme on peut s'en apercevoir sur un exemple.

Cet exemple est celui qui provient de la résolution de l'équation $\square u - k^2 u = 0$. Dans ce cas particulier, il est facile de vérifier que l'équation (7) admet une infinité de solutions.

L'étude du cas général demanderait un examen des conditions à imposer au noyau, dont l'intégrabilité et le caractère borné ne suffisent pas à assurer l'existence d'une solution. Cet examen est en relation étroite avec celui des propriétés de la fonction $\mathbf{U}$, qui, comme nous l'avons vu reste à faire.

Enfin nous verrons au chapitre V que, dans le cas particulier des phases polyvalentes, l'équation intégrale en Ω est remplacée par une équation différentielle immédiatement intégrable.

5. - APPLICATION DES SINGULARITES PONCTUELLES : INTERFERENCES PAR QUANTAS ISOLES.

Les expériences d'interférences en lumière très faible (assez faible pour qu'il ne passe dans l'appareil qu'un quantum à la fois) posent un paradoxe qu'on a l'habitude, non pas de résoudre, mais d'éviter en recourant à la théorie de la complémentarité.

Ce paradoxe est le suivant : les dites expériences donnent, après un temps de pose suffisamment long, les mêmes figures d'interférence que les expériences en lumière normale. Chaque photon se place donc, individuellement, sur les mêmes directions d'émergence que lorsqu'il fait partie d'une collection. Dès lors se pose le dilemme :

1/ ou bien le photon, pour prendre une direction privilégiée, interfère avec lui-même, ce qui conduit à lui conférer des dimensions de l'ordre du réseau, dimensions incompatibles avec les effets photo-électrique, Compton, etc...

2/ ou bien le photon est trop petit pour interférer avec lui-même ; mais alors on ne comprend pourquoi, à sa sortie du réseau, la trajectoire du photon est influencée par les fentes qui se trouvent en arrière.

Ce dilemme semblant insoluble, on en vient en général à la conclusion qu'il n'existe pas de forme théorique permettant de représenter à la fois l'aspect ondulatoire et l'aspect corpusculaire d'un phénomène et que, suivant l'expression de C. G. Darwin (ii), "si nous faisons une expérience qui mette en

évidence les propriétés ondulatoires, cette expérience nous interdit d'observer en même temps les propriétés corpusculaires, et vice-versa". De là, entre autres conséquences, l'inanité de la notion de trajectoire.

Or cette conclusion repose essentiellement sur l'hypothèse qu'on ne peut pas trouver de réponse à la seconde objection ci-dessus (étant établi que la première est irréfutable), c'est-à-dire qu'il est impossible de trouver une mécanique qui fasse dépendre la trajectoire du corpuscule, non seulement des conditions initiales comme en mécanique classique, mais aussi des conditions aux limites.

Mais la mécanique ondulatoire permet précisément d'expliquer cette liaison nouvelle, et nous allons voir qu'il est possible, avec la notion d'onde à singularité, de répondre à l'objection 2, et de comprendre le pourquoi de l'influence des fentes.

Si en effet on part de l'équation du photon :

$$(8) \quad \square u = 0$$

dont les solutions singulières sont données par la formule (7) du chapitre II

$$(9) \quad u(x^0) = \frac{\omega(\tau)}{\rho(c - v_p)}$$

on peut démontrer que les mêmes conditions qui imposent à une solution régulière de l'équation (8) de conduire à la formule classique des interférences, à savoir :

- a/ à chaque instant les différentes fentes du réseau sont en phase,
- b/ on observe à l'infini,

imposent aussi à la singularité de la solution singulière (9) de se diriger suivant les directions d'émergence classiques.

L'influence des fentes sur la trajectoire du photon en aval d'elles-mêmes est tout simplement due à l'effet de conditions aux limites sur la solution singulière.

On peut voir facilement que le résultat reste le même lorsque, au lieu de l'équation (8), on prend l'équation $\square u - k^2 u = 0$, qui peut représenter aussi bien le photon doué de masse que l'électron se déplaçant en l'absence de champ (abstraction faite du spin bien entendu).

6. - SINGULARITE LINEAIRE. - PHASE ET GUIDAGE

Nous considérons les singularités linéaires qui se localisent, à chaque instant t , sur un petit arc de la trajectoire C défini par l'intervalle $(t - \frac{\lambda}{c}, t)$

de θ . La solution singulière est définie par l'équation (3) du chapitre I (voir aussi le parag. 7 de ce chapitre), et la fonction μ par l'équation (1) du chapitre II.

On montre facilement que si, à l'instant t , le point $M(x, y, z)$ tend vers un point $A(\theta)$ de l'arc singulier, la phase $\varphi(M, t)$ tend vers

$$\dot{\varphi} [A(\theta), t] = \eta(\theta, t - \theta)$$

$\eta(\theta; \alpha)$ étant la phase de la fonction arbitraire $v(\theta; \alpha)$ qui intervient dans la formation de la fonction μ .

La phase est donc continue au passage de l'arc singulier.

En ce qui concerne les dérivées de la phase sur ce même arc, on montre que :

a/ la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ y est définie et continue ;

les dérivées spatiales $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ ne sont définies qu'à la condition que soit vérifiée une équation intégral-différentielle analogue à (7). Quand cette équation est vérifiée les quantités :

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} [a^i(\theta), t] + \gamma^k [a^i(\theta), t]}{v^k(\theta)}$$

soit indépendantes de l'indice k , ce qui signifie que deux des trois relations de la formule du guidage sont satisfaites. Pour satisfaire à la quatrième, celle qui contient la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, il est nécessaire d'imposer à η une condition qu'il est aisé de remplir.

Les résultats de la singularité linéaire sont donc, hormis leur complication un peu plus grande, identiques à ceux que nous avons énoncés pour la singularité ponctuelle.

DEMONSTRATIONS

3bis. - SINGULARITE PONCTUELLE. - PHASE ET GUIDAGE

Partons de l'équation (5) qui donne la forme de la solution singulière. Nous poserons, pour simplifier les notations :

$$H = \int_{-\infty}^{\tau} \omega(\theta) U[x^{\sigma}, a^{\sigma}(\theta)] d\theta$$

et, comme nous l'avons déjà fait : $D = \rho(c - v_f)$

L'équation (5) s'écrit alors :

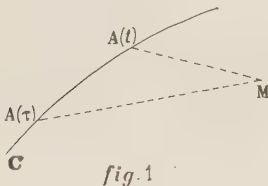
$$u = \frac{\omega U - 2HD}{D}$$

La phase φ de u est donnée par la relation :

$$2i\varphi = \log \frac{u}{u^*}$$

u^* étant la conjuguée de u , obtenue en remplaçant dans (5) ω , U et U par leurs conjuguées respectives ω^* , U^* et U^* .

En tout point non singulier de l'espace-temps, le rapport $\frac{u}{u^*}$ est régulier puisque nous avons démontré (chapitre I, par. 4) que u y est une fonction régulière.



Lorsque, au temps t , le point M tend vers le point singulier $A(t)$, τ tend vers t , D tend vers zéro, et le rapport u/u^* tend vers

$$\lim \frac{\omega}{\omega^*} \frac{U}{U^*}$$

Or au point singulier on a : $U = U[a^{\sigma}(t); a^{\sigma}(t)] = 1$, donc $U^* = 1$; ω/ω^* est alors égal à $e^{2i\zeta(t)}$, ζ étant la phase de ω , et par suite on a :

$$\varphi[A(t), t] = \zeta(t)$$

Calculons maintenant les dérivées de $u(x^{\sigma})$. Nous désignerons comme nous l'avons déjà fait par $\frac{d}{dx^{\sigma}}$ le symbole de dérivation $\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial \tau}{\partial x^{\sigma}} \frac{d}{d\tau}$, avec $\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}$ + $\frac{\partial a^k}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial a^k}$. Avec ces notations, les dérivées de u s'écrivent :

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial x^{\sigma}} = \frac{U}{D} \frac{d\omega}{dx^{\sigma}} + \frac{\omega}{D} \frac{dU}{dx^{\sigma}} - \frac{\omega U}{D^2} \frac{dD}{dx^{\sigma}} - 2 \frac{dH}{dx^{\sigma}}$$

Formons maintenant la quantité :

$$(11) \quad 2i \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{u^*} \frac{\partial u^*}{\partial x^\sigma}$$

et faisons tendre le point M vers A(t)

Le second membre va être la somme de 4 termes. Le premier a pour valeur :

$$\frac{\mathbf{U}}{\omega \mathbf{U} - 2 \mathbf{H} \mathbf{D}} \frac{d\omega}{dx^\sigma} - \frac{\mathbf{U}^*}{\omega^* \mathbf{U}^* - 2 \mathbf{H}^* \mathbf{D}} \frac{d\omega^*}{dx^\sigma}$$

Lorsque M tend vers A(t) , D tend vers zéro, U et U* vers 1, et la quantité précédente a pour limite .

$$(12) \quad \frac{1}{\omega(t)} \lim \frac{d\omega}{dx^\sigma}(\tau) - \frac{1}{\omega^*(t)} \lim \frac{d\omega^*}{dx^\sigma}(\tau) = 2i \lim \frac{d\zeta}{dx^\sigma}(\tau)$$

la limite étant prise pour $\tau = t$, ce qui donne :

$$2i \lim \frac{d\zeta}{dx^\sigma}(\tau) = 2i \frac{d\zeta}{dt} \lim \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma}$$

$\frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma}$ est donné par les équations (5) du chapitre I et a une limite qui dépend de la direction suivant laquelle M tend vers A(t)

On passe du premier au second terme de $\frac{\partial u}{\partial x^\sigma}$ en permutant ω et U ; on peut donc faire de même pour le second terme de $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}$, et d'après la forme du premier membre de (12) ce terme s'écrit :

$$(13) \quad \frac{1}{\mathbf{U} \left[a^i(t), t ; a^i(t), t \right]} \lim \frac{d\mathbf{U}}{dx^\sigma} - \frac{1}{\mathbf{U}^*} \lim \frac{d\mathbf{U}^*}{dx^\sigma} = \lim \left(\frac{d\mathbf{U}}{dx^\sigma} - \frac{d\mathbf{U}^*}{dx^\sigma} \right)$$

Or on a :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^\sigma} (x^\sigma; a^i, \tau) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^\sigma} + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a^i} \frac{da^i}{d\tau} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma}$$

Les équations (22) et (23) du chapitre II donnent les valeurs des dérivées partielles de U lorsque les points x^σ et a^σ sont confondus. On a donc, lorsque τ se confond avec t :

$$\lim \frac{d\mathbf{U}}{dx^\sigma} = -b_\sigma [a^\rho(t)] + \left\{ b_i [a^\rho(t)] v^i(t) + b_4 [a^\rho(t)] \right\} \lim \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma}$$

Le terme (13) s'écrit par conséquent :

$$-2i\gamma_{\sigma} + 2i(\gamma_i v^i + \gamma_4) \lim \frac{\delta \tau}{\delta x^{\sigma}}$$

Passons maintenant au troisième terme de $2i \frac{\delta \tau}{\delta x^{\sigma}}$. Il s'écrit :

$$\left[-\frac{\omega \mathbf{U}}{\mathbf{D}} \frac{1}{\omega \mathbf{U} - 2 \mathbf{H} \mathbf{D}} + \frac{\omega^* \mathbf{U}^*}{\mathbf{D}} \frac{1}{\omega^* \mathbf{U}^* - 2 \mathbf{H}^* \mathbf{D}} \right] \frac{d \mathbf{D}}{d x^{\sigma}}$$

quantité égale à :

$$\frac{2(\omega \mathbf{U} \mathbf{H}^* - \omega^* \mathbf{U}^* \mathbf{H})}{(\omega \mathbf{U} - 2 \mathbf{H} \mathbf{D})(\omega^* \mathbf{U}^* - 2 \mathbf{H}^* \mathbf{D})} \frac{d \mathbf{D}}{d x^{\sigma}}$$

Sa limite pour M venant en $A(\dagger)$ est :

$$(14) \quad 2 \left[\frac{\mathcal{H}^*(t)}{\omega^*(t)} - \frac{\mathcal{H}(t)}{\omega(t)} \right] \lim \frac{d \mathbf{D}}{d x^{\sigma}}$$

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^*$ désignant les limites respectives de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}^*$, c'est-à-dire que l'on a par exemple :

$$(15) \quad \mathcal{H}(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\theta) \mathcal{U}[a^k(t), t; a^k(\theta), \theta] d\theta$$

Nous poserons :

$$(16) \quad \frac{\mathcal{H}(t)}{\omega(t)} - \frac{\mathcal{H}^*(t)}{\omega^*(t)} = i \mathcal{K}(t)$$

la quantité $\mathcal{K}(t)$ étant manifestement réelle. Le terme (14) s'écrit alors :

$$-2i \mathcal{K}(t) \lim \frac{d \mathbf{D}}{d x^{\sigma}}$$

Enfin le dernier terme de $2i \frac{\delta \tau}{\delta x^{\sigma}}$ s'écrit :

$$-\frac{2 \mathbf{D}}{\omega \mathbf{U} - 2 \mathbf{H} \mathbf{D}} \frac{d \mathbf{H}}{d x^{\sigma}} + \frac{2 \mathbf{D}}{\omega^* \mathbf{U}^* - 2 \mathbf{H}^* \mathbf{D}} \frac{d \mathbf{H}^*}{d x^{\sigma}}$$

dont la limite est nulle.

Bien entendu les résultats qui précèdent ne sont valables qu'à la condition que $\omega(t)$ ne soit pas nul.

En rassemblant les quatre termes qui interviennent dans la formation de $2i \frac{\delta \tau}{\delta x^{\sigma}}$, il vient :

$$2i \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} [a^\rho(t)] = 2i \frac{d\zeta}{dt}(t) \lim \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma} - 2i \gamma_\tau [a^\rho(t)] \\ + 2i \left\{ \gamma_k [a^\rho(t)] v^k(t) + \gamma_4 [a^\rho(t)] \right\} \lim \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma} - 2i K(t) \lim \frac{dD}{dx^\sigma}$$

soit, en faisant apparaître les composantes u^σ de la formule du guidage :

$$v^k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \gamma^k = P(t) \lim \frac{\partial \tau}{\partial x^k} - K(t) \lim \frac{dD}{dt} \\ u^4 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^4 = -\frac{1}{c^2} \left[P(t) \lim \frac{\partial \tau}{\partial t} - K(t) \lim \frac{dD}{dt} \right]$$

en ayant posé :

$$(17) \quad P(t) = \frac{d\zeta}{dt} + \gamma_k v^k + \gamma_4$$

Les quantités $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}$, γ^σ , v^k , ζ , sont dans ces équations prises au point $a^k(t)$, t .

On a d'autre part :

$$\frac{dD}{d\tau} = \frac{\partial D}{\partial x^k} v^k + \frac{\partial D}{\partial \tau} = c \frac{\alpha^k - x^k}{\rho} v^k + v^2 - (x^k - \alpha^k) \frac{dv^k}{d\tau}$$

d'où, à la limite pour $\tau = t$, $\rho = 0$:

$$\lim \frac{dD}{d\tau} = v^2(t) - c \lim v_0$$

Il vient ensuite :

$$\frac{dD}{dx^k} = \frac{\partial D}{\partial x^k} + \frac{dD}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^k} = c \frac{x^k - \alpha^k}{\rho} - v^k + \frac{dD}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^k} \\ = -v^k + \left[\frac{dD}{d\tau} - c(c - v_\rho) \right] \frac{\partial \tau}{\partial x^k}$$

d'où, à la limite :

$$\lim \frac{dD}{dx^k} = -v^k(t) - [c^2 - v^2(t)] \lim \frac{\partial \tau}{\partial x^k}$$

On a enfin :

$$\lim \frac{dD}{dt} = \lim \frac{dD}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lim (v^2 - c v_\rho) \frac{c}{c - v_\rho}$$

Les composantes u^σ au point singulier peuvent donc s'écrire :

$$u^k = K v^k + \left[P + (c^2 - v^2) K \right] \lim \frac{\delta \tau}{\delta x^k}$$

$$u^4 = K - \frac{1}{c^2} \left[P + (c^2 - v^2) K \right] \lim \frac{\delta \tau}{\delta t}$$

Nous voyons sur ces équations qu'en général les u^σ , donc les $\frac{\delta \varphi}{\delta x^\sigma}$, ont une limite qui dépend de celles des $\frac{\delta \tau}{\delta x^\sigma}$, c'est-à-dire de la direction suivant laquelle le point M tend vers le point A(t). Pour que les u^σ aient une limite bien déterminée et unique, il faut et il suffit que le coefficient de $\frac{\delta \tau}{\delta x^\sigma}$ dans l'expression de u^σ soit nul, c'est-à-dire que l'on ait :

$$(18) \quad P(t) + (c^2 - v^2) K(t) = 0$$

qui n'est autre que la condition (6) donnée au sommaire.

Si cette condition est remplie, les u^σ ont pour valeurs, au point A(t), t :

$$u^k = K v^k \quad u^4 = K$$

et la formule du guidage est, comme on le voit, vérifiée.

En formant $u^k v^k - c^2 u^4$ on obtient aisément l'égalité $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\zeta}{dt}$, à laquelle on pouvait s'attendre puisque $\varphi[A(t), t] = \zeta(t)$.

Passons au calcul des dérivées secondes. On le mènera comme celui des dérivées premières. Par dérivation de l'équation qui donne $\frac{\delta \varphi}{\delta x^\sigma}$ on obtient :

$$(19) \quad 2i \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^\rho \delta x^\sigma} = - \frac{1}{u^2} \frac{\delta u}{\delta x^\rho} \frac{\delta u}{\delta x^\sigma} + \frac{1}{u} \frac{\delta^2 u}{\delta x^\rho \delta x^\sigma} + \frac{1}{u^{*2}} \frac{\delta u^*}{\delta x^\rho} \frac{\delta u^*}{\delta x^\sigma} - \frac{1}{u^*} \frac{\delta^2 u^*}{\delta x^\rho \delta x^\sigma}$$

Si on forme l'expression

$$- \frac{1}{u^2} \frac{\delta u}{\delta x^\rho} \frac{\delta u}{\delta x^\sigma} + \frac{1}{u} \frac{\delta^2 u}{\delta x^\rho \delta x^\sigma}$$

à partir de la valeur (10) des dérivées premières de u , on constate, par exemple en développant $\omega \mathbf{U} - 2\mathbf{H}\mathbf{D}$ en fonction de l'infiniment petit $\mathbf{D}$, que :

- les termes en $1/\mathbf{D}^2$ ont la valeur

$$\frac{1}{\mathbf{D}^2} \frac{d\mathbf{D}}{dx^\rho} \frac{d\mathbf{D}}{dx^\sigma} - \frac{1}{\mathbf{D}^2} \frac{d^2 \mathbf{D}}{dx^\rho dx^\sigma}$$

et annulent les termes correspondants provenant de u^* dans la formation du second membre de (19) :

- les termes en $1/\mathbf{D}$ ont pour valeur

$$(20) \quad -\frac{c}{\omega \mathbf{U}} \frac{d^2 \mathbf{D}}{dx^p dx^\sigma} + \frac{1}{\omega} \frac{d^2 \omega}{dx^p dx^\sigma} + \frac{1}{\mathbf{U}} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dx^p dx^\sigma}.$$

Bien que $\mathbf{D}$ n'y figure pas explicitement en dénominateur, ces termes deviennent infinis comme $1/\mathbf{D}$. On a en effet :

$$\frac{d^2 \omega}{dx^p dx^\sigma} = \frac{d^2 \omega}{d\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial x^p} \frac{\partial \tau}{\partial x^\sigma} + \frac{d\omega}{d\tau} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^p \partial x^\sigma}$$

où il est facile de voir que seule la dérivée $\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^p \partial x^\sigma}$ devient infinie avec $1/\mathbf{D}$.

On a de même, en écrivant seulement les quantités infiniment grandes :

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{dx^p dx^\sigma} \sim \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^p \partial x^\sigma}$$

Calculons maintenant les dérivées secondes de $\mathbf{D}$. On a vu que :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{D}}{dx^k} &= -v^k + \left[\frac{d\mathbf{D}}{d\tau} - c(c - v_p) \right] \frac{\partial \tau}{\partial x^k} \\ &= -v^k + \left[v^2 - c^2 - (x^j - \alpha^j) \frac{dv^j}{d\tau} \right] \frac{\partial \tau}{\partial x^k} \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d}{dx^\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^k} \right) \sim (v^2 - c^2) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^k \partial x^\sigma}$$

De :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{D}}{dt} &= \frac{d\mathbf{D}}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \left[v^2 - c^2 - (x^j - \alpha^j) \frac{dv^j}{d\tau} \right] \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= \left[v^2 - c^2 - (x^j - \alpha^j) \frac{dv^j}{d\tau} \right] \frac{\partial \tau}{\partial t} + c^2 \end{aligned}$$

on tire :

$$\frac{d^2 \mathbf{D}}{dt^2} \sim (v^2 - c^2) \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}$$

On a donc généralement :

$$\frac{d^2 \mathbf{D}}{dx^p dx^q} \sim (v^2 - c^2) \frac{\delta^2 \tau}{\delta x^p \delta x^q}$$

et l'on voit par suite que les termes infinis de (20) sont :

$$\left[\frac{2}{\omega \mathbf{U}} (c^2 - v^2) + \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau} + \frac{1}{\mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} \right] \frac{\delta^2 \tau}{\delta x^p \delta x^q}$$

Pour que les dérivées secondes de φ soient finies au point singulier, il faut et il suffit donc que l'on ait, à la limite pour $\mathbf{D} = 0$:

$$2 \left(\frac{\mathbf{H}}{\omega \mathbf{U}} - \frac{\mathbf{H}^*}{\omega^* \mathbf{U}^*} \right) (c^2 - v^2) + \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{1}{\omega^*} \frac{d\omega^*}{d\tau} + \frac{1}{\mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} - \frac{1}{\mathbf{U}^*} \frac{d\mathbf{U}^*}{d\tau} = 0$$

Cette condition n'est autre que la condition (6).

Les dérivées secondes de φ sont donc finies au point singulier. Il n'en résulte pas qu'elles y soient univoquement déterminées, et le calcul des termes finis de ces dérivées, calcul long et sans intérêt aucun, montre que la valeur des dérivées secondes de φ dépend de la direction suivant laquelle $\mathbf{M}$ tend vers $\mathbf{A}(t)$.

4bis. - RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE (6)

Considérée comme équation en ζ , l'équation (7) peut s'écrire :

$$(21) \quad \frac{d\zeta}{dt} = f(t) + \int_{-\infty}^t \mathbf{K}(t, \theta) \sin [\varepsilon(t, \theta) + \zeta(\theta) - \zeta(t)] d\theta$$

en ayant posé :

$$f(t) = -(\gamma_k v^k + \gamma_4)$$

$$\mathbf{K}(t, \theta) = [c^2 - v^2(t)] \frac{\Omega(\theta)}{\Omega(t)} \mathbf{Y}(t, \theta)$$

La dernière équation suppose essentiellement que $\Omega(t)$, qui est une quantité non négative, admet en outre une borne inférieure non nulle. En supposant, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, $\mathbf{Y}(t, \theta)$ intégrable, et en outre $\Omega(\theta)$ bornée supérieurement, on voit que l'intégrale de (21) est absolument convergente.

Considérée comme équation en Ω , l'équation (7) s'écrit :

$$(22) \quad \Omega(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{K}(t, \theta) \Omega(\theta) d\theta$$

en ayant posé ici :

$$\kappa(t, \theta) = \frac{[c^2 - v^2(t)] \mathbf{Y}(t, \theta)}{\frac{d\zeta}{dt} - f(t)} \sin[\epsilon(t, \theta) + \zeta(\theta) - \zeta(t)]$$

égalité qui suppose essentiellement $\frac{d\zeta}{dt} - f(t) \neq 0$. Cette condition est évidemment nécessaire pour que les équations du guidage (2) et (3) aient un sens. Comme on dispose de ζ , on peut toujours s'arranger pour qu'elle soit satisfaite.

Enfin l'équation (7) peut être considérée comme une relation entre les composantes de la vitesse sur la trajectoire, v^k , et constitue ainsi une équation intégrale-différentielle du premier ordre à laquelle doivent satisfaire les fonctions $x^k(t)$, équation susceptible de déterminer la trajectoire, avec une certaine part d'arbitraire.

Traitions l'exemple, annoncé au sommaire, de l'équation $\square u - k^2 u = 0$, M. L. de Broglie (i) a donné comme solution singulière de cette équation la fonction :

$$u(xyzt) = \frac{1}{r'} \left[A e^{r' \sqrt{k^2 - k'^2}} + B e^{-r' \sqrt{k^2 - k'^2}} \right] e^{\frac{ic k'}{\sqrt{1 - \beta^2}} (t - \frac{zv}{c^2})}$$

où :

$$r'^2 = x^2 + y^2 + \frac{(z - vt)^2}{1 - \beta^2} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad k' \leq k$$

La singularité, de coordonnées $x = y = 0$, $z = vt$, se déplace le long de l'axe des z avec une vitesse constante v .

En utilisant la méthode du chapitre III, on calcule aisément la fonction $\omega(t)$ qui, à une constante réelle multiplicative près, est égale à :

$$\omega(t) = e^{ic k' \sqrt{1 - \beta^2} t}$$

Il est intéressant de remarquer ici le saut que le radical $\sqrt{1 - \beta^2}$ effectue du dénominateur au numérateur de l'exponentielle lorsqu'on passe de la fonction u à la fonction ω . C'est exactement le phénomène que M. L. de Broglie a observé dans sa Thèse et auquel il a appliqué le théorème de "l'harmonie des phases". Le phénomène périodique lié au mobile est caractérisé pour l'observateur fixe par la fonction $\omega(t)$, de fréquence $\frac{ck'}{2\pi} \sqrt{1 - \beta^2}$, et dont l'effet se propage par le potentiel de ligne avec la vitesse c ; l'onde de phase est explicitée par la fonction u , de fréquence $\frac{ck'}{2\pi \sqrt{1 - \beta^2}}$ et de vitesse de propagation c^2/v . On voit donc comment le potentiel de ligne relie naturellement ces deux fréquences.

Dans le cas de l'équation précitée la fonction $\mathcal{U}[x^\sigma, a^\sigma(\theta)]$ a pour valeur, comme nous l'avons vu au chapitre II, par. 5 :

$$\mathcal{U} = \frac{k}{2} \frac{\mathbf{J}_1[k \sqrt{c^2(t - \theta)^2 - r^2}]}{\sqrt{c^2(t - \theta)^2 - r^2}}$$

avec $r^2 = \sum [x^k - a^k(\theta)]^2$. La fonction $u(t, \theta) = u[a^\sigma(t); a^\sigma(\theta)]$ a donc pour valeur :

$$u(t, \theta) = \frac{k}{2} \frac{J_1[kc\sqrt{1-\beta^2}(t-\theta)]}{c\sqrt{1-\beta^2}(t-\theta)}$$

Formons alors la fonction $\mathcal{X}(t)$ qui entre dans l'égalité (16).

En posant :

$$\xi = kc\sqrt{1-\beta^2}(t-\theta)$$

on a :

$$\mathcal{X}(t) = \frac{k}{2c\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^\infty e^{ic k' \sqrt{1-\beta^2} \theta} \frac{J_1(\xi)}{\xi} d\xi$$

et par conséquent :

$$\frac{\mathcal{X}(t)}{\omega(t)} = \frac{k}{2c\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^\infty e^{-i \frac{k'}{k} \xi} \frac{J_1(\xi)}{\xi} d\xi$$

On sait (iii) que l'intégrale ci-dessus a pour valeur :

$$\sqrt{1 - \frac{k'^2}{k^2}} - i \frac{k'}{k}$$

et on a par suite, d'après l'égalité (16) :

$$K(t) = - \frac{k'}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

L'équation (18) devient donc ici :

$$\frac{d\zeta}{dt} + (c^2 - v^2) K(t) = ck'\sqrt{1-\beta^2} - (c^2 - v^2) \frac{k'}{c\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

et on voit qu'elle est identiquement vérifiée.

Dans le cas particulier envisagé, l'équation (7) admet donc une famille infinie de solutions $u(\theta) = \text{Cte}$, $\zeta = ck'\sqrt{1-\beta^2}\theta$ ($k' \leq k$). C'est là d'ailleurs une éventualité qui semble se produire assez fréquemment dans les équations de Volterra à limite infinie.

M. L. de Broglie a donné de la même équation $\square u - k^2 u = 0$ une autre solution singulière, de même type que la précédente, mais où les exponentielles en r' sont remplacées par des exponentielles en ir' . Si on applique à cette solution le calcul précédent, on constate que l'équation (7) n'est plus vérifiée : la raison en est que, dans ce cas, les

dérivées premières de la phase contiennent des termes qui proviennent de la dérivation de r' et qui, quoique finis, ne sont pas déterminés univoquement au point singulier.

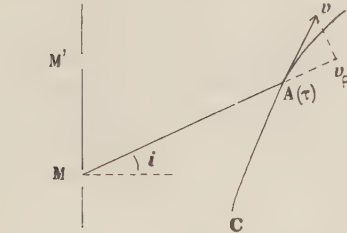
On remarquera d'autre part que l'intégrale du noyau de l'équation (22), noyau qui est ici égal à

$$\frac{k}{k'} \frac{J_1(\xi)}{\xi} \sin \frac{k'}{k} \xi$$

est égal à 1 quel que soit t . C'est la propriété que nous avons annoncée au sommaire : l'intégrale du noyau ne tend pas vers zéro quand la limite supérieure t de l'intégrale tend vers $-\infty$.

5bis.- INTERFERENCES PAR QUANTAS ISOLEES

Partons de l'équation (9). On peut voir d'abord que, si $u=fe^{i\varphi}$ a une phase φ périodique, ω doit avoir également une phase ζ périodique. Plaçons-nous en effet sur une fente M du réseau (fig. 2) ; à un instant t , il correspond à M , sur la trajectoire spatiale C du photon, un point $A(\tau)$ déterminé par la relation $c(t-\tau)-\Lambda_\tau M=0$



Si T est la période de φ , à l'instant $t+T$ correspond à M un point $A(\tau+\Delta\tau)$ et, comme $\varphi(M,t)$ est égal à $\zeta(\tau)$ d'après l'équation (9), on doit avoir :

fig. 2

$$\zeta(\tau+\Delta\tau)=\zeta(\tau)$$

On a d'autre part :

$$\Delta\tau=\int_t^{t+T}\frac{\partial\tau}{\partial t}dt\neq T\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{cT}{c-v_p}$$

En vertu de l'hypothèse a de l'énoncé, d'après laquelle ρ est pratiquement infini, v_p varie peu pendant une période T et l'on voit par conséquent que ζ admet la période $\frac{cT}{c-v_p}=\Theta$

Ecrivons maintenant la condition a de l'énoncé : au même instant t deux fentes voisines M et M' , distantes de e , sont en phase. Si $\delta\tau$ est la variation de τ due au passage de M en M' , on doit avoir encore :

$$\zeta(\tau+\delta\tau)=\zeta(\tau)$$

avec :

$$\delta\tau=\frac{\partial\tau}{\partial x^k}\delta x^k=-\frac{x^k-\alpha^k}{\rho(c-v_p)}\delta x^k=\pm\frac{e\sin i}{c-v_p}$$

On a donc, k étant un entier quelconque :

$$\delta\tau = \frac{e \sin i}{c - v_p} = k\theta = k \frac{cT}{c - v_p}$$

soit :

$$e \sin i = k\lambda$$

si $\lambda = cT$ est la longueur d'onde.

Nous devons faire ici une remarque. Quand on s'appuie sur l'équation du photon (8), la seule solution de l'équation intégrale (7) est $\zeta = \text{Cte}$. Avec une phase ζ périodique, effectivement variable, telle que celle que nous venons d'utiliser, l'équation (7) ne peut être vérifiée ; par conséquent les dérivées premières de φ sont indéterminées au point singulier et la formule du guidage ambiguë. Pour éviter cet inconvénient (qui n'est pas majeur en l'occurrence puisqu'il s'agissait simplement de prouver que les conditions aux limites guident le corpuscule, quel que soit le mécanisme exact du guidage), il suffit de s'adresser à l'équation $\square u - k^2 u = 0$, où le photon est supposé avoir une masse non nulle. La formule du guidage est rétablie, mais que devient celle des interférences ?

Reportons-nous à l'équation (8) du chapitre II :

$$u(x^0) = \frac{\omega(\tau)}{\rho(c - v_p)} - k \int_{-\infty}^{\tau} \omega(\theta) \frac{J_1 \left[k \sqrt{c^2(t - \theta)^2 - r^2} \right]}{\sqrt{c^2(t - \theta)^2 - r^2}} d\theta$$

L'influence du terme intégral dépend de la grandeur de k . On a :

$$k = \frac{2\pi}{h} m_0 c = 2,85 \cdot 10^{37} m_0 \quad \text{C.G.S.}$$

Prenons d'abord pour m_0 la masse estimée du photon, par exemple $m_0 = 10^{-40}$ C.G.S. En supposant, pour simplifier, que la trajectoire est rectiligne, en prenant le point M sur cette trajectoire en amont du photon et enfin en admettant que ce dernier a une vitesse sensiblement égale à c , on voit facilement qu'une variation de θ égale à la période T de la radiation lumineuse (10^{-14} sec. environ) fait varier l'argument de J_1 au plus de $5 \cdot 10^{-4}$, c'est-à-dire d'une quantité pour laquelle J_1 ne varie sensiblement pas (iii). Autrement dit, $\omega(\theta)$ varie beaucoup plus rapidement que J_1 en étant périodique. Le deuxième terme de u sera donc largement inférieur à :

$$\Omega_m \frac{k}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \int_0^{\infty} \frac{J_1(\xi)}{\xi} d\xi$$

Ω_m étant l'amplitude moyenne de ω . L'intégrale de la fonction de Bessel est égale à 1, et par conséquent la quantité ci-dessus a pour valeur $\frac{k}{c \sqrt{1 - \beta^2}}$. En tirant β de la rela-

tion $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = h\nu$, la valeur numérique de cette quantité est $7 \cdot 10^{-7}$ C.G.S. La valeur

trouvée de β fournit également : $c - v \neq 2,7 \cdot 10^{-4}$ C.G.S. Le coefficient de ω dans le premier terme de u est donc très supérieur au coefficient de Ω_m dans le second terme tant que ρ est inférieur à $10^8 - 10^9$ cm, ce qui est bien le cas dans toutes les expériences d'interférences.

On voit donc que, pour le photon doué de masse, le terme de u qui dépend de cette masse est négligeable devant le terme qui n'en dépend pas ; la formule des interférences n'a donc pas à être modifiée.

Prenons maintenant $m_0 = 0,9.10^{-27}$ g., masse de l'électron ; on en déduit $k = 2,5.10^{10}$ C.G.S. Il se passe alors le phénomène inverse du précédent : ω varie beaucoup moins rapidement que J_1 . Pour $\theta = \tau - T = \tau - 10^{-18}$, l'argument de J_1 prend des valeurs de l'ordre de 10^7 , pour lesquelles la fonction $\frac{J_1(\xi)}{\xi}$ est pratiquement nulle. On peut écrire par conséquent :

$$k \int_{-\infty}^{\tau} \omega(\theta) \frac{J_1 \left[k \frac{\sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}}{\sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}} \right]}{\sqrt{c^2(t-\theta)^2 - r^2}} d\theta \neq \frac{k}{c \sqrt{1-\beta^2}} \omega(\tau) \int_0^{\infty} \frac{J_1(\xi)}{\xi} d\xi$$

et on voit que, dans ce cas, c'est le terme intégral qui est prépondérant, et u est pratiquement égal à Cte $\times \omega(\tau)$. Ici encore, aucun changement n'en résulte pour la formule des interférences.

On voit en définitive que cette formule reste valable lorsqu'on passe de l'équation $\square u = 0$ à l'équation $\square u - k^2 u = 0$, pourvu que la masse du corpuscule soit celle du photon ou celle de l'électron. La formule ne serait modifiée sensiblement que pour une particule dont la masse serait de l'ordre de 10^{-30} g., particule inexistante ou encore non observée.

6bis. - SINGULARITE LINEAIRE. - PHASE ET GUIDAGE

D'après le chapitre I, par. 6, nous savons que, lorsque $M(xyz)$ tend, à l'instant t , vers un point $A(\theta)$ de l'arc singulier, la partie principale infiniment grande de la fonction u est, pour $\theta < t$:

$$2 \frac{\mu[x^k, t; a^k(\theta), \theta]}{\nu(\theta)} \log \frac{R}{\delta}$$

Il en résulte que la phase φ de u donnée par l'équation $2i\varphi = \log \frac{u}{u^*}$ tend, lorsque δ tend vers zéro, vers la phase de μ au point $x^k = a^k(\theta)$, $x^4 = t$; $a^k = a^k(\theta)$, θ . On obtiendrait le même résultat pour $\theta = t$.

Si on se reporte alors au chapitre II, équation (1), et qu'on désigne par $\eta(\theta; \alpha)$ la phase de la fonction $\nu(\theta; \alpha)$, on voit facilement que, pour r nul, la phase de μ est égale à celle de ν . On a donc :

$$\varphi[a^k(\theta), t] = \eta(\theta; t - \theta)$$

Passons maintenant aux dérivées de φ . Le calcul détaillé est long et sans grand intérêt ; nous nous contenterons donc d'en exposer les grandes lignes, surtout en ce qui concerne le calcul des parties principales de u au voisinage de la singularité.

Partons de la forme adoptée du potentiel de ligne, chapitre I, par. 2, la forme de μ étant donnée par l'équation (1) du chapitre II. On a déjà remarqué que μ dépendait des x^k à la fois explicitement et par l'intermédiaire de r .

Les dérivées de u ont pour valeurs :

$$(23) \quad \frac{\partial u}{\partial x^k} = \int_{-\infty}^{\tau} \left[\frac{d\mu}{dx^k} \frac{1}{r} - \mu \frac{x^k - a^k}{r^3} \right] d\theta + \frac{\mu(x^\sigma; a^\sigma)}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x^k}$$

$$(24) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{1}{r} d\theta + \frac{\mu(x^\sigma; a^\sigma)}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

Dans l'expression de la dérivée spatiale il faut tenir compte de ce que :
 $\frac{d\mu}{dx^k} = \frac{\partial \mu}{\partial x^k} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{x^k - a^k}{r}$, ce qui donne pour la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x^k}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x^k} = \int_{-\infty}^{\tau} \left[\frac{\partial \mu}{\partial x^k} \frac{1}{r} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{x^k - a^k}{r^2} - \mu \frac{x^k - a^k}{r^3} \right] d\theta + \frac{\mu(x^\sigma; a^\sigma)}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x^k}$$

On voit, sur cette expression et sur celle de $\frac{\partial u}{\partial t}$, quelles sont les parties principales à calculer. La partie principale des termes en $1/r$ a été calculée au chapitre I, par. 6 : le même procédé qu'alors permettra de calculer les parties principales des termes en $\frac{x-a}{r^2}$ et $\frac{x-a}{r^3}$; il sera nécessaire bien entendu de faire des hypothèses complémentaires sur la régularité de la courbe C et les dérivées secondes de μ . Les résultats sont les suivants : (pour les notations, voir chapitre I, par. 6bis) :

- la partie principale de $\frac{\partial u}{\partial x^k}$ est , pour l'intégrale :

$$\begin{aligned} & - \frac{\mu_0}{v_0} \left[\frac{x^k - a_0^k}{\delta^2} \left(\frac{s_2}{\sigma_2} - \frac{s_1}{\sigma_1} \right) + \left(\frac{da}{ds} \right)_0 \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a}{ds^2} \right)_0 \log \frac{\sigma_2 + s_2}{\sigma_1 + s_1} \right] \\ & + \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x^k} \right)_0 \log \frac{\sigma_2 + s_2}{\sigma_1 + s_1} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mu}{v} \right)_0 \left(\frac{da^k}{ds} \right)_0 \log \frac{\sigma_2 + s_2}{\sigma_1 + s_1} \end{aligned}$$

- la partie principale de l'intégrale de $\frac{\partial u}{\partial t}$ est :

$$\frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_0 \log \frac{\sigma_2 + s_2}{\sigma_1 + s_1}$$

Dans ces expressions, l'indice zéro signifie qu'il faut prendre, en ce qui concerne les variables a^k, θ , les quantités qui en sont affectées au point 0 , pied de la perpendiculaire abaissée de $M(x^k)$ sur la trajectoire spatiale C . On remarquera l'absence des dérivées $\frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^k}$

A ces parties principales il faut ajouter les termes finis qui figurent dans les équations (23) et (24) ; mais on voit aisément que ces termes ne sont susceptibles d'augmenter indéfiniment que si $\theta_l = t$. Pour éviter des longueurs nous laisserons ce dernier cas de côté ; il aboutit d'ailleurs aux mêmes résultats que ceux que nous allons obtenir pour $\theta_l < t$.

Formons :

$$2i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{u^*} \frac{\partial u^*}{\partial t}$$

Il résulte immédiatement de ce qui précède et de l'expression de la partie principale de u (équation (17), chap. I) que, lorsque δ tend vers zéro, le second membre tend vers :

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} \right)_0 - \frac{1}{\mu_0^*} \left(\frac{\partial \mu^*}{\partial t} \right)_0 = 2i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_0$$

ε étant la phase de μ au point $x^k = a^k(\theta_0)$, t ; $a^k = a^k(\theta_0)$, θ_0 . On a donc :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} [a^k(\theta_0), t] = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} [a^k(\theta_0), t; a^k(\theta_0), \theta_0]$$

Formons maintenant :

$$2i \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x^k} - \frac{1}{u^*} \frac{\partial u^*}{\partial x^k}$$

Au contraire de ce qui se passe pour $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, nous allons rencontrer une condition de possibilité pour l'existence des dérivées. Écrivons pour un instant :

$$u = \left(\frac{\mu}{v} \right)_0 \log \frac{\sigma_2 + s_2}{\sigma_1 + s_1} + P$$

P étant une quantité finie lorsque δ tend vers zéro. Pour que $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$ soit fini, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(25) \quad P \left(\frac{\mu^*}{v} \right)_0 - P^* \left(\frac{\mu}{v} \right)_0 = 0$$

Si cette condition est remplie, on trouvera aisément :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k} \right)_0 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right)_0 \left(\frac{d a^k}{d s} \right)_0$$

Laissons de côté pour l'instant l'équation (25). La forme de μ nous permet de calculer les dérivées de ε en fonction des dérivées de la phase η de $v(\theta; a)$. En se reportant au chapitre II, équation (1), et en prenant bien soin de ne pas dériver par rapport à r pour avoir les dérivées en $\frac{\partial}{\partial a^k}$ ou $\frac{\partial}{\partial x^k}$, on trouve, pour $r = 0$

$$2i \frac{\partial \varphi}{\partial t} [a^k(\theta_0), t] = 2i \frac{\partial \eta}{\partial t} (\theta_0, t - \theta_0) + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial U^*}{\partial t} - \frac{\partial U^*}{\partial \theta}$$

les dérivées de U et U^* étant prises au point $x^\sigma = a^\sigma = a^\sigma(\theta_0)$, t , c'est-à-dire, compte tenu des équations (22) et (23) du chapitre II :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} [a^k(\theta_0), t] = \frac{\partial \eta}{\partial t} (\theta_0, t - \theta_0)$$

On trouvera de même pour $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} [a'(\theta_o), t] = -\gamma_k [a'(\theta_o), t] + \left\{ \gamma_j [a'(\theta_o), t] v^j(\theta_o) + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} (\theta_o, t - \theta_o) + \frac{\partial \eta}{\partial t} (\theta_o, t - \theta_o) \right\} \frac{v^k(\theta_o)}{v^2(\theta_o)}$$

On voit immédiatement que la quantité $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \gamma_k$ est colinéaire à v^k ; on a ainsi obtenu deux des trois équations de la formule du guidage. Pour que la troisième équation soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\left[1 - \frac{v^2(\theta_o)}{c^2} \right] \frac{\partial \eta}{\partial t} (\theta_o, t - \theta_o) = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} (\theta_o, t - \theta_o) + \gamma_k [a'(\theta_o), t] v^k(\theta_o) + \frac{v^2(\theta_o)}{c^2} \gamma_k [a'(\theta_o), t]$$

Les fonctions γ_α ; η et v étant supposées connues, et la valeur de t donnée, cette équation est une équation numérique en θ_o ; si elle a une ou plusieurs racines comprises entre $t - \frac{\chi}{c}$ et t , la formule du guidage est vérifiée sur la singularité. On verrait facilement que l'on peut choisir v de telle sorte que l'équation ci-dessus soit vérifiée pour $\theta_o = t$ par exemple.

Revenons à l'équation (25). Elle peut s'écrire, en reprenant la définition de P :

$$\Im \left\{ \frac{1}{\mu [a^k(\theta_o), t ; a^k(\theta_o), \theta_o]} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\mu [a^k(\theta_o), t ; a^k(\theta), \theta] - \mu [a^k(\theta_o), t ; a^k(\theta_o), \theta_o]}{r} d\theta \right\} = 0$$

Cette équation constitue une équation intégrale en $v(t; \alpha)$, analogue à celle que nous avons trouvée en (6) pour les singularités ponctuelles.

BIBLIOGRAPHIE

- i. - L. de BROGLIE. - J. Phys. Rad. - 1927, p. 225, et "La physique quantique restera-t-elle indéterministe, Gauthier-Villars, 1953
- ii. - C. G. DARWIN. - The new conceptions of the matter. - Londres, 1931
- iii. - WATSON. - Bessel functions.

Chapitre V. - RACCORD ENTRE LES SOLUTIONS SINGULIERES ET LES SOLUTIONS REGULIERES. - PASSAGE A UNE EQUATION NON LINEAIRE

1. - GENERALITES

Nous reprendrons dans ce chapitre l'équation d'onde sous la forme :

$$(G) \quad g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + 2b^\rho \frac{\partial u}{\partial x^\rho} - ku = 0$$

les $g^{\rho\sigma}$ étant les coefficients d'une métrique simplement hyperbolique, qui peut être ou non euclidienne ; les b^ρ sont des coefficients complexes de la forme $\beta^\rho + i\gamma^\rho$, k une fonction réelle quelconque, positive dans les équations d'onde usuelles.

Si on écrit la solution complexe de l'équation (G) sous la forme $u = f e^{i\varphi}$ cette équation est équivalente au système suivant :

$$(1) \quad g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + 2\gamma^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} + k = \frac{1}{f} \left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + 2\beta^\rho \frac{\partial f}{\partial x^\rho} \right)$$

$$(2) \quad 2 \left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho \right) \frac{\partial f}{\partial x^\rho} + f \left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + 2\beta^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \right) = 0$$

système que nous avons déjà écrit au chapitre I pour l'équation (E).

Les lignes de guidage sont définies, de même qu'au chapitre IV, par les équations différentielles :

$$(3) \quad u^\rho = \frac{dx^\rho}{d\lambda} = g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho$$

u^ρ pouvant être considéré comme un vecteur impulsion de l'espace-temps.

L'introduction de $u^\rho = \frac{dx^\rho}{d\lambda}$ dans le premier terme de l'équation (2) montre que cette dernière se met sous une forme immédiatement intégrable en f^2 . On peut en effet l'écrire :

$$(4) \quad \frac{df^2}{d\lambda} + f^2 \left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + 2 \beta^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \right) = 0$$

On peut d'ailleurs, en tirant $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}$ de l'équation (3) en fonction de $u^\rho - \gamma^\rho$ mettre les équations (1) et (2) sous deux formes remarquables ; nous nous bornerons, pour écrire ces formes, au cas où $g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + 2 \beta^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho}$ est le laplacien généralisé $\square$, c'est-à-dire au cas où l'équation (G) s'écrit :

$$(5) \quad \square u + 2i \gamma^\rho \frac{\partial u}{\partial x^\rho} - k u = 0$$

Dans ce cas en effet les équations (1) et (2) s'écrivent :

$$(1\text{bis}) \quad u^\rho u_\rho - \gamma^\rho \gamma_\rho + k = \frac{\square f}{f}$$

$$(2\text{bis}) \quad \frac{df^2}{d\lambda} + f^2 \left(\frac{D u^\rho}{D x^\rho} - \frac{D \gamma^\rho}{D x^\rho} \right) = 0$$

$\frac{D}{Dx}$ étant le symbole de dérivation covariante.

Lorsque le vecteur γ^ρ est un vecteur à divergence nulle (cas du potentiel électromagnétique par exemple) l'équation (2bis) s'écrit :

$$(6) \quad \frac{df^2}{d\lambda} + f^2 \frac{D u^\rho}{D x^\rho} = 0$$

ou encore :

$$\frac{D(f^2 u^\rho)}{D x^\rho} = 0$$

d'où son nom d'équation de continuité. On retrouvera immédiatement la propriété que suggère cette dénomination si, en se plaçant dans le cas où la métrique $g^{\rho\sigma}$ est celle de la relativité restreinte ($\square = \Sigma \delta^2 / \partial x^{k^2} - \delta^2 / c^2 \partial t^2$), on exprime les diverses quantités qui figurent dans l'équation (6) dans l'espace à trois dimensions. Dans ce dernier, la vitesse le long d'une ligne de guidage a pour composantes $v^k = \frac{u^k}{u^4}$, et l'équation (6) s'écrit :

$$(7) \quad \frac{d}{dt} (f^2 u^4) + f^2 u^4 \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0$$

C'est là l'équation de continuité de la mécanique classique, où $f^2 u^4$ apparaît comme la densité d'un fluide fictif de vitesse spatiale v^i ; nous appelons ρ cette densité.

Ces résultats sont dus à M.L. de Broglie.

2. - LES LIGNES DE GUIDAGE SONT DES LIGNES DE RACCORD

Nous avons vu au chapitre IV que les lignes de guidage sont celles que suit une singularité de la fonction d'onde lorsque cette dernière en possède une ; bien entendu ces lignes sont alors définies sur la phase de la solution singulière elle-même. Nous allons voir qu'il est possible de discerner pour les lignes de guidage une deuxième signification dans laquelle, à côté de la solution singulière, intervient une deuxième solution.

Les équations (1) et (2) présentent en effet une particularité remarquable. Si d'une part on considère l'équation (2) comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre en f , φ étant supposée connue, on voit que les caractéristiques de cette équation (ou plus exactement les projections de ces caractéristiques dans l'espace des x^p , abstraction faite de f) sont précisément les lignes de guidage. D'autre part les caractéristiques de l'équation (1) considérée comme équation en φ ont également pour projections dans l'espace x^p les lignes de guidage. On peut tirer de ces propriétés des conclusions intéressantes.

Commençons par l'équation (2). Toute surface engendrée par des lignes de guidage, que nous appellerons surface de guidage ou surface de de Broglie, est une surface pour laquelle le problème de Cauchy appliqué à cette équation considérée comme équation en f est impossible ou indéterminé. On peut donc s'attendre à ce que, dans des conditions convenablement choisies, les surfaces de de Broglie soient des surfaces de raccordement pour deux solutions de l'équation (G), et en effet on peut démontrer le théorème suivant :

a) Si deux solutions de l'équation d'onde se raccordent sur une surface d'espace-temps Σ , ce raccord étant défini par les conditions suivantes :

- rapport constant des amplitudes ;
 - égalité des phases respectives, de leurs dérivées premières homologues, de leurs dérivées secondes homologues ;
- cette surface Σ est une surface de de Broglie.

b) Une solution de l'équation d'onde étant donnée, ainsi qu'une surface de de Broglie de cette solution qui ne soit pas en même temps surface d'onde, il existe, au moins dans le cas analytique, une infinité de solutions locales qui se raccordent à la solution donnée suivant la loi précédente.

On voit immédiatement qu'un cas particulier de ce théorème est celui où les deux amplitudes sont assujetties à être égales ; on en déduit, l'équation

(G) étant linéaire, que le théorème est encore vrai si les deux amplitudes doivent une différence constante, au lieu d'un rapport constant.

On retrouve des propriétés de raccord analogues dans un certain nombre de problèmes physiques, en particulier dans le problème des solutions globales de la relativité généralisée traité par M. A. Lichnerowicz (1), qui a énoncé à ce propos un théorème de raccord dont celui qui vient d'être énoncé est fortement inspiré.

3. - EXTENSION A UN TYPE D'EQUATIONS NON LINEAIRES

Considérons maintenant les équations du type suivant :

$$(M) \quad g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + 2b^\rho \frac{\partial \Psi}{\partial x^\rho} - k \Psi = R(x^\rho, A) e^{is}$$

où A et s sont l'amplitude et la phase de la fonction d'onde complexe $\Psi = A e^{is}$ et R une fonction régulière de ses arguments. Cette équation est équivalente au système :

$$g^{\rho\sigma} \frac{\partial s}{\partial x^\rho} \frac{\partial s}{\partial x^\sigma} + 2\gamma^\rho \frac{\partial s}{\partial x^\rho} + k + \frac{R}{A} = \frac{1}{A} \left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 A}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + 2\beta^\rho \frac{\partial A}{\partial x^\rho} \right)$$

$$2 \left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial s}{\partial x^\rho} + \gamma^\rho \right) \frac{\partial A}{\partial x^\rho} + A \left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 s}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} + 2\beta^\rho \frac{\partial s}{\partial x^\rho} \right) = 0$$

On voit que l'équation de Jacobi est seule modifiée par rapport aux équations linéaires, l'équation de continuité conservant sa forme et ne dépendant pas du coefficient R .

On peut par conséquent définir sur une solution de l'équation (M) des lignes de guidage par des équations formellement identiques aux équations (3).

Pour la même raison on peut énoncer, en ce qui concerne le raccord de deux solutions :

Le théorème du raccord entre deux fonctions d'onde reste vrai si l'une des deux fonctions obéit à l'équation linéaire (G), l'autre à l'équation non linéaire (M), les coefficients $g^{\rho\sigma}$, b^ρ , k étant bien entendu les mêmes pour les deux équations.

Le théorème reste encore vrai si les deux fonctions obéissent à la même équation non linéaire (M).

On voit en définitive que les lignes de de Broglie jouent un rôle analogue à celui des bicaractéristiques des équations d'onde; de même que toute surface

d'onde, lieu de bicaractéristiques, est une surface de raccord possible (avec discontinuités du second ordre pour amplitude et phase) pour plusieurs fonctions d'onde, de même les surfaces de de Broglie engendrées par les lignes de guidage sont des surfaces de raccord (avec discontinuité du 1er ordre pour l'amplitude, du 3ème ordre pour la phase) entre plusieurs fonctions d'onde.

4. - INTERPRETATION PHYSIQUE DES CONDITIONS DE RACCORD

Les résultats auxquels on peut parvenir sont les suivants, et sont sensiblement les mêmes qu'il s'agisse d'équations linéaires ou non.

a/ Egalité des phases

C'est la condition bien connue de la théorie de la double solution, dont dépend "l'engrènement", pour reprendre une expression de M.L. de Broglie, des deux solutions l'une avec l'autre.

b/ Egalité des dérivées premières de la phase.

Elle signifie d'abord l'égalité de ce qu'on peut appeler, d'une expression assez impropre, mais imagée, les vecteurs "courant", que nous avons désignés par u^p pour la solution u , et que nous désignerons par Ψ^p pour la solution Ψ . Cette égalité est d'ailleurs une évidence puisque la surface de raccordement est précisément engendrée par les "lignes de courant".

La même condition signifie en second lieu l'égalité des fréquences, en appelant fréquence locale d'une solution u la quantité $\frac{1}{2\pi} \frac{\delta \varphi}{\delta t}$, qui est bien la fréquence de l'onde lorsque celle-ci est monochromatique.

c/ Egalité des amplitudes.

Avec la condition précédente, cette condition signifie l'égalité, sur la surface de raccordement, des densités des fluides fictifs correspondant aux deux solutions.

Cette égalité des densités est à rapprocher de l'égalité des pressions qui s'impose, en Hydrodynamique, à deux fluides assujettis à rester en contact. Quand ce contact est sans glissement, il s'accompagne aussi de l'égalité des vecteurs vitesses, condition que nous avons trouvée en b.

La condition de rapport entre les deux amplitudes a la même signification lorsque l'une au moins des deux équations est linéaire, car on sait que deux solutions d'une équation linéaire en rapport constant ne diffèrent pas essentiellement l'une de l'autre. Il n'en est pas de même lorsque les deux équations sont du type (M), et la signification intuitive du rapport constant, si ce rapport est différent de 1, est beaucoup moins saisissable.

d/ Egalité des dérivées secondes de la phase.

On peut poursuivre encore ici l'analogie hydrodynamique, et voir que la

condition d'égalité des dérivées secondes est une condition d'extremum pour le contact entre les deux fluides fictifs. On peut en effet énoncer :

Etant donné une surface (d'espace-temps) de de Broglie Σ sur laquelle se raccordent les deux fonctions d'onde u_1 et u_2 , et toutes les surfaces Σ' infiniment voisines de Σ et s'appuyant sur deux coupes données mais quelconques de Σ , la différence des flux d'espace-temps, à travers ces surfaces Σ' , des deux vecteurs courant u_1^ρ et u_2^ρ :

$$I = \int_{\Sigma'} (u_1^\rho - u_2^\rho) N_\rho d\Sigma'$$

(N_ρ normale à Σ'), qui est nulle sur Σ , y est également extremum.

Savoir si cet extremum est un maximum ou un minimum n'a pas grand intérêt puisqu'on transforme un maximum en minimum et inversement en permutant les deux fonctions u_1 et u_2 . On verrait cependant facilement que le signe de I est en relation avec le signe de la variation que subit le rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ des densités des fluides fictifs quand on traverse la surface Σ .

La condition d'extremum peut être aussi énoncée dans l'espace.

Le théorème de raccord nous a permis de dégager une deuxième signification des lignes de guidage. Cette signification peut paraître a priori sans rapport avec la première, qui fait intervenir la notion de singularité. En réalité ce rapport existe. Sans vouloir en faire un instrument de démonstration, on peut recourir à l'analogie avec le potentiel newtonien qui a été évoquée dans l'Introduction. Etant donné une sphère électrisée de manière homogène, cette sphère est une surface de raccordement (à potentiels égaux) entre le potentiel régulier réel créé par la sphère et le potentiel singulier fictif que créerait une masse ponctuelle convenable placée au centre de la sphère. Il est assez vraisemblable que, dans le cas qui nous occupe, étant donné une solution régulière Ψ et une surface de de Broglie Σ de cette solution, il existera, parmi l'infinité des solutions qui se raccordent avec Ψ sur Σ , une solution singulière.

Une autre façon de voir les choses est la suivante : une ligne de guidage L peut être considérée comme le cas limite d'une suite infinie $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \dots$ de surfaces de de Broglie tubulaires qui l'entourent. Formons, sur chaque tube Σ_n , une solution u_n qui se raccorde avec la solution initiale Ψ . Comme, sur Σ , on peut disposer du rapport constant A des amplitudes, on peut concevoir des solutions dont les amplitudes sur les tubes Σ_n augmentent indéfiniment à mesure que Σ_n tend vers L ; à la limite, on obtiendra une solution singulière se raccordant avec Ψ sur la ligne L suivant une loi d'égalité des phases et de leurs dérivées premières (l'égalité des dérivées secondes tombant du fait que la condition d'extremum n'est plus applicable). Ce deuxième point de vue doit nous conduire à rechercher directement le raccordement d'une solution régulière et des solutions singulières que nous avons définies aux chapitres précédents.

5. - EXAMEN DES CARACTERISTIQUES DE L'EQUATION DE JACOBI

Revenons maintenant à l'équation de Jacobi (1) . Considérée comme équation en φ , f étant supposée connue, c'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dont les caractéristiques sont données par la méthode classique. Un calcul simple conduit alors aux résultats suivants :

a/ Les caractéristiques de l'équation de Jacobi coïncident avec les lignes pour lesquelles est stationnaire l'action :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{1}{2} u^p u_p - \gamma^p u_p + \frac{1}{2} \left(\frac{\square f}{f} + \gamma^p \gamma_p - k \right) \right] d\lambda \quad u^p = \frac{dx^p}{d\lambda}$$

Ce résultat a déjà été trouvé par Takabayasi (ii), à partir de considérations légèrement différentes.

b/ Toute ligne d'action stationnaire, dont le vecteur vitesse vérifie en outre l'équation de Jacobi (1bis), et qui est tangente en un de ses points à la ligne de guidage qui passe par ce point, coïncide avec cette ligne de guidage.

c/ La valeur de l'action sur une telle ligne est égale, à une constante additive près, à la phase.

6. - PLACAGE D'UNE SOLUTION SINGULIERE SUR UNE SOLUTION REGULIERE

Comme suite à ce qui a été dit au parag. 4, nous allons maintenant nous attaquer au problème du raccordement d'une solution singulière et d'une solution régulière. Ce problème présente évidemment un double aspect : une solution régulière étant donnée, peut-on lui raccorder une solution singulière et comment ? inversement, étant donné un ensemble de solutions singulières, existe-t-il une solution régulière qui se raccorde à chacune d'entre elles ?

Nous nous placerons désormais en métrique de la relativité restreinte, et nous n'envisagerons comme solutions singulières que les solutions à singularité ponctuelle.

Pour le premier problème, on arrive aux résultats suivants :

Soit $\Psi = A e^{iS}$ une solution régulière de l'équation d'onde linéaire (E). Elle permet de définir des lignes de guidage par les équations différentielles :

$$(8) \quad \frac{dx^i}{\frac{\partial S}{\partial x^i} + \gamma^i} = \frac{dt}{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t} + \gamma^4}$$

Pour toute ligne de guidage L pour laquelle l'équation intégrale (7) du chapitre IV :

$$(9) \quad \Omega(t) + \frac{c^2 - v^2}{\frac{\partial s}{\partial t} + \gamma_i v^i + \gamma_4} \int_{-\infty}^t Y(t; \theta) \sin[\varepsilon(t; \theta) + s(\theta) - s(t)] \Omega(\theta) d\theta = 0$$

est résoluble, on peut définir une solution à singularité ponctuelle construite sur la ligne L comme trajectoire, à condition de prendre pour ω la fonction

$$\omega(t) = \Omega(t) e^{is(t)}$$

$s(t)$ étant la valeur de la phase de la solution régulière au point $x^k(t)$, t de la ligne L , et $\Omega(t)$ étant la solution de l'équation (9), définie à une constante multiplicative près. Cette solution singulière se raccorde sur L avec Ψ en satisfaisant à l'égalité des phases et à l'égalité des dérivées premières des phases.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, on doit se demander pour quelle classe de fonctions s l'équation (9) admet effectivement une solution. Nous reviendrons sur ce problème plus loin.

Ce qui nous importe pour l'instant, c'est de remarquer que, lorsque l'équation (9) est résoluble pour chaque ligne de guidage de Ψ , on peut plaquer une famille de solutions singulières, dont la somme est encore une solution singulière, sur n'importe quelle famille de lignes de guidage de Ψ ; la répartition en densité des singularités est donc absolument arbitraire, et peut être sans aucun rapport avec la densité $A^2 s^4$ de la solution Ψ .

En raison de cet inconvénient, il est nécessaire de chercher d'autres possibilités de raccordement : ces possibilités vont s'offrir dans l'examen du problème inverse : construction d'une solution régulière à partir d'une solution singulière.

7. - CONSTRUCTION D'UNE FONCTION REGULIERE APPROCHANT UNE SOLUTION SINGULIERE DE (E)

Considérons une famille de solutions singulières de (E) : $u_1, u_2 \dots$
 $u_k = \int_{\kappa} e^{i\varphi_{\kappa}} \dots u_{\kappa}$, en nombre fini mais très grand ou infini dénombrable. Nous supposons que chacune de ces solutions u_{κ} possède une singularité ponctuelle décrivant la trajectoire appelée C_{κ} dans l'espace et L_{κ} dans l'espace-temps.

Nous supposons en outre que cette famille discrète de solutions est constituée comme suit : on a préalablement défini une famille continue de trajectoires C (ou L), et, sur chacune de ces trajectoires, une fonction $\omega(\theta)$

qui varie continûment avec la trajectoire considérée. Les fonctions $\omega = \Omega e^{i\zeta}$ sont supposées obéir à l'équation (9) où s est remplacée par ζ . Les trajectoires C_k sont choisies à volonté parmi les trajectoires C , et les fonctions associées ω_k sont les fonctions ω correspondantes.

La somme $\sum_1^M u_k = u = f e^{i\varphi}$ est également solution de (E). Elle possède évidemment comme singularités l'ensemble des singularités des diverses solutions, u_k . Il est en outre facile de montrer que, sur chaque ligne singulière d'espace-temps L_k , on a les égalités :

$$\varphi = \varphi_k \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^\sigma}$$

Nous définirons maintenant une fonction régulière $\Psi = A e^{is}$ de la manière suivante. Soit ω un domaine d'espace, de forme et de dimensions invariables, que l'on peut déplacer et orienter à volonté ; nous appellerons centre de ω un point intérieur à ω et rigidement fixé à lui, et nous désignerons par $\omega(m)$ le domaine ω ayant m comme centre. Nous supposons que ω , dont aucune dimension n'est infiniment petite par rapport aux autres, est de dimensions assez grandes pour renfermer, au moins dans un certain domaine de l'espace, un grand nombre de singularités, mais de dimensions petites par rapport à la longueur d'onde principale du phénomène étudié.

Par définition, la fonction Ψ sera définie par l'équation :

$$(10) \quad \Psi(m, t) = \frac{1}{\omega} \int_{\omega(m)} u(M, t) d\omega_M$$

l'intégrale (spatiale) étant divisée par le volume ω du domaine $\omega(m)$. Ψ est donc une moyenne de u .

Cette moyenne possède les propriétés suivantes :

a/ la fonction $\Psi(m, t)$ est sensiblement égale à $u(m, t)$, sauf aux points où u est singulière et au voisinage de ces points ;

b/ définissons la densité moyenne σ des singularités en un point m à un instant donné comme le nombre de singularités intérieures à cet instant au domaine $\omega(m)$ centré sur m . σ est une fonction ne possédant que des discontinuités de première espèce, donc intégrable, et que l'on peut considérer, si ω est suffisamment petit et le nombre des singularités suffisamment grand, comme une fonction continue et même dérivable.

La fonction $\Psi(m, t)$ est alors sensiblement égale à la fonction qui serait donnée par la définition :

$$\Psi(m, t) = \int \sigma(m) u(m, t; C) d\omega$$

où on fait l'intégration dans tout l'espace de la famille continue de fonctions singulières construite sur la famille continue de trajectoires C .

c/ la fonction $\Psi(m, t)$ satisfait à l'équation d'onde

$$\square \Psi + 2b^p \frac{\partial \Psi}{\partial x^p} - k \Psi + \frac{4\pi}{c} \sigma \omega = 0$$

σ étant la densité moyenne au point x^p , et ω la valeur de la fonction associée à la trajectoire L qui passe par ce point x^p .

8. - FORMATION D'UNE EQUATION NON LINEAIRE ET THEOREME DE RACCORD

On considère, parmi toutes les classes possibles de solutions singulières telles qu'elles viennent d'être définies, celles qui obéissent aux conditions, valables sur chaque trajectoire L_k :

$$(11) \quad \varphi_k = \text{phase de } (u - u_k)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} [\text{phase de } (u - u_k)]$$

Cette condition est effectivement restrictive : bien que la phase φ_k de u_k soit, sur L_k , égale à celle de la solution totale u , il ne s'ensuit pas nécessairement que les conditions précédentes soient remplies.

Si elles le sont, s est égal à φ en tout point de l'espace-temps, y compris sur les lignes singulières L_k , ce qui n'était pas le cas jusqu'à présent ; de même les dérivées premières de s et de φ sont égales dans tout l'espace-temps. Les lignes L_k sont donc des lignes de guidage de Ψ .

On peut alors montrer que Ψ vérifie une équation non linéaire du type :

$$(N) \quad \mathcal{L} \Psi + \frac{4\pi}{c} \Omega A^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial s}{\partial t} + \gamma^4 \right) e^{is} = 0$$

$\mathcal{L}$ étant l'opérateur différentiel $(\square + 2b^p \partial/\partial x^p - k)$, et Ω obéissant à l'équation intégrale (9) sur chaque trajectoire L de la famille continue.

C'est ce système (N, 9) que nous substituerons désormais à l'équation d'onde linéaire (E).

Supposons maintenant que nous connaissions une solution Ψ , Ω (Ψ régulière) de ce système (N, 9). On définit sur cette solution des lignes de guidage par les équations :

$$s^p = \frac{dx^p}{d\lambda} = g^{p\sigma} \frac{\delta s}{\delta x^\sigma} + \gamma^p \quad g^{p\sigma} = \left(1, 1, 1, -\frac{1}{c^2}\right)$$

et une densité ρ par l'équation :

$$\rho = A^2 s^*$$

Si on connaît une solution singulière $u = \sum u_k$ de l'équation linéaire (E) telle que :

- a/ chaque ligne singulière L_k de u soit une ligne de guidage de Ψ , les phases s et φ étant égales sur L_k ;
- b/ l'amplitude de la fonction ω entrant dans la formation de u soit précisément égale sur L_k à la fonction Ω associée à Ψ ;
- c/ Ψ soit moyenne de u ;

la densité σ des singularités de u est égale à la densité ρ de l'onde Ψ .

Il nous reste maintenant à montrer qu'on peut effectivement :

- former des solutions singulières qui obéissent à la quadruple condition (11) :
- une solution Ψ, Ω de $(N, 9)$ étant donnée, former une solution singulière basée sur les lignes de guidage de Ψ , et dont Ψ soit précisément la moyenne.

Nous laisserons de côté le second problème, qui demanderait à lui seul une assez longue étude, et nous nous contenterons de chercher à résoudre le premier.

Avant de l'aborder, faisons une remarque sur le théorème qui vient énoncé. Si on compare les conditions qui y sont posées avec celles qui ont été posées au parag. 2 pour le raccord de deux solutions, on voit qu'on retrouve sans changement les conditions d'égalité des phases et de leurs dérivées premières. Par contre la condition b ci-dessus semble à première vue ne rappeler que de loin la condition, portant sur les amplitudes, du parag. 2 ; elle est pourtant en rapport étroit avec elle. Il suffit, pour s'en rendre compte, de remarquer que la fonction Ω commande, dans l'équation (N), l'amplitude A de la solution : si on possède une solution de $(N, 9)$, on en obtient une infinité d'autres en multipliant Ω par une constante et en divisant A par cette même constante. Comme d'autre part l'amplitude de u est liée à celle de $|\omega|$, on voit que la condition b est bien une condition portant sur les amplitudes.

Quant à la condition c, qui est nouvelle, elle peut sembler artificielle ; il n'en est rien en réalité. La coïncidence des lignes de guidage entre solution régulière et solution singulière ne fait que traduire une identité de trajectoires ; elle ne peut renfermer en elle-même aucune relation de densité, et cette relation de densité, et cette relation ne peut advenir que si par ailleurs existe une condition, quelle qu'elle soit, qui oblige la fonction Ψ à "ressembler" à la fonction u .

9. - SOLUTIONS A PHASE POLYVALENTE.

Revenons au problème posé par les conditions (11). Pris dans sa généralité, il est difficile à résoudre. Nous le simplifierons en le particulier volontairement, et en nous plaçant dans le cas où toutes les solutions singulières $u_1, \dots, u_k, \dots$ ont la même phase en tout point de l'espace-temps. Il est évident que les équations (11) sont alors satisfaites.

Tâchons de définir la portée de la restriction ainsi apportée aux solutions singulières u .

Un argument qui plaide en faveur de cette restriction est que, lorsque le nombre des singularités, et par conséquent le nombre des trajectoires L_k , est grand, l'égalité des phases s et φ sur ces trajectoires revient pratiquement à leur égalité dans le continuum à 4 dimensions. De là à transposer sur le plan de l'identité mathématique, il n'y a qu'un pas, qu'il est tentant de franchir.

D'autre part, ainsi qu'on pourra le voir plus loin, cette restriction amène à définir la phase par des équations qui, quand elles sont vérifiées, sont totalement indépendantes de l'amplitude ; la phase régit alors les trajectoires (comme l'action dans l'équation classique de Hamilton-Jacobi), l'amplitude les densités, et le potentiel quantique Ψ n'a plus d'influence sur la détermination de la phase, ce qui a pu parfois sembler souhaitable sans être, à vrai dire, impératif.

En contrepartie, on peut remarquer que, jusqu'à preuve administrée, on n'a pas grande indication physique pour pencher vers une hypothèse ou vers l'autre. En outre, et c'est cela qui est le plus important, les équations (11) introduisent d'elles-mêmes un phénomène de non-linéarité. En effet, si on a formé une famille de solutions u_k obéissant à ces équations, en général l'adjonction à cette famille d'une solution singulière supplémentaire (même dotée d'une seule singularité) u' fera que la nouvelle famille n'obéira plus à (11) ; autrement dit la somme de deux solutions u et u' de (E) satisfaisant chacune à (11) est encore solution de (E), mais non plus de (11). Si on se restreint au cas particulier envisagé au contraire la condition (11) continue d'être satisfaite même après adjonction à u d'une solution u' ayant la même phase que u dans tout l'espace-temps. Bien entendu l'introduction de Ψ fait apparaître la non-linéarité, mais un parallélisme harmonieux disparaît.

En tout état de cause, seules l'expérience et la théorie poussées plus loin permettront de trancher.

Nous appellerons phase "polyvalente" d'une équation une fonction φ à laquelle on puisse faire correspondre une infinité d'amplitudes singulières $f_1, \dots, f_k, \dots$ et au moins une amplitude régulière A telles que $f_1 e^{i\varphi}, \dots, f_k e^{i\varphi}, \dots, A e^{i\varphi}$ soient des solutions de l'équation donnée.

Savoir si une fonction donnée φ est une phase polyvalente est un problème de compatibilité de deux équations aux dérivées partielles. On peut l'aborder de la manière suivante, en traitant d'abord le cas de l'équation linéaire (E).

φ étant donnée dans tout l'espace-temps, on définit sur elle des lignes de guidage par les équations habituelles, et on rapporte l'espace-temps à des coordonnées $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \lambda$ telles que les lignes de guidage soient décrites par la variation de λ à ξ^k constants. Si on désigne, dans ce nouveau système, par $G^{p\sigma}$ les composantes du tenseur métrique (qui est toujours celui de la relativité restreinte), et par H^k et J quatre fonctions déterminées et calculables, la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit une phase polyvalente pour l'équation (E) est que l'équation elliptique :

$$G^{ik} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + 2H^k \frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} + J f_0 = 0$$

admette une infinité de solutions, les unes régulières, les autres singulières, de la forme $f_0(\xi^k)$, c'est-à-dire indépendantes de λ .

En général, les coefficients G^{ik}, H^k, J dépendant de λ en sus des ξ^k , cette équation n'admet pas d'autre solution que $f_0 = 0$, et il est facile de trouver des exemples où il en est effectivement ainsi.

On peut d'autre part énoncer une condition suffisante pour que l'équation précédente admette une infinité de solutions f_0 , et on aboutit alors au résultat suivant :

Pour que φ soit une phase polyvalente, il suffit que l'on ait les équations :

$$(12) \quad \frac{1}{G^{ik}} \frac{\partial G^{ik}}{\partial \lambda} = \frac{1}{H^k} \frac{\partial H^k}{\partial \lambda} = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \lambda}$$

quels que soient ξ^k et λ .

La phase φ se trouve ainsi soumise à 9 équations aux dérivées partielles, qui devront évidemment être compatibles. On construit sans difficulté des cas particuliers où il en est ainsi.

En désignant par $\mathcal{K}$ le rapport commun défini ci-dessus et en revenant à un système de coordonnées quelconque, les six premières des équations (12) s'écrivent :

$$(13) \quad \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (v^i v^k) + \frac{\mathcal{H}}{u^4} \left(\delta_{ik} - \frac{v^i v^k}{c^2} \right) = 0$$

les v^k étant les composantes de la vitesse le long des lignes de guidage de φ , et u^4 la quatrième composante de l'impulsion d'espace-temps $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^4$.

10. - DETERMINATION DE LA FONCTION Ω .

Lorsqu'une phase est polyvalente et régulière dans tout l'espace-temps (ou tout au moins admet des dérivées premières bien déterminées), les solutions singulières qui lui correspondent vérifient forcément l'équation intégrale (9) : cette équation est en effet la condition nécessaire et suffisante pour que les dérivées premières de la phase soient déterminées sans ambiguïté.

Dans le cas particulier où la phase est polyvalente en vertu des équations (12), il est possible de déterminer la fonction Ω , non plus par l'équation intégrale (9), mais par une équation différentielle. Cette équation peut s'obtenir ainsi : d'une part on peut exprimer, jusqu'au voisinage de la ligne singulière, Ω en fonction de l'amplitude f de la fonction singulière grâce à la formule générale des singularités ponctuelles, d'autre part la dérivée de f est donnée au voisinage de la ligne singulière par l'équation de continuité (7). La comparaison des deux relations utilisées donne l'équation :

$$(14) \quad \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \log \frac{(c^2 - v^2)A}{u^4}$$

dont l'intégrale est :

$$\Omega = \left[\frac{(c^2 - v^2)A}{u^4} \right]^{\frac{1}{3}} \times C^{te}$$

On voit facilement que le coefficient $1/3$ provient du nombre de dimensions de l'espace.

11. - PHASE POLYVALENTE DE L'EQUATION NON LINEAIRE.

Quand on passe de l'équation linéaire :

$$(E) \quad \mathcal{L}\Psi = 0$$

à l'équation non linéaire :

$$(N) \quad \mathcal{L}\Psi + \frac{4\pi}{c} \Omega A^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^4 \right) e^{i\varphi} = 0$$

les conditions de polyvalence de la phase (12) s'assortissent d'une relation supplémentaire provenant du terme en Ω de l'équation (N).

On peut démontrer que, à condition que cette fonction Ω vérifie l'équation (14), et quelle que soit l'amplitude A de la solution de (N), une phase polyvalente pour l'équation (E) l'est aussi pour l'équation (N).

Ce résultat permet de résoudre facilement le système (N, 9) dans le cas où on se place volontairement d'une phase polyvalente.

A cet effet, on commencera par résoudre les équations (12) qui déterminent, quand elles ont une solution, la phase φ polyvalente pour l'équation (E).

On détermine ensuite l'amplitude A au moyen de l'équation de continuité (7) et à partir de la valeur A_0 de A donnée pour $t = 0$. On détermine enfin la fonction Ω au moyen de l'équation (14) et à partir de la donnée Ω_0 de Ω pour $t = 0$.

Quelles que soient les données A_0 et Ω_0 , la phase φ reste polyvalente pour (N).

Equation d'onde non linéaire et structure des corpuscules.

La fonction Ω remplace la fonction de Dirac qui figure implicitement au second membre de l'équation (E) quand on lui attribue des solutions singulières. Ce faisant, elle remplace une singularité mathématique par une répartition finie, susceptible de traduire une structure, dont l'évolution au cours du temps est donnée par l'équation (14) en fonction de la structure initiale donnée par Ω_0 .

Il n'est pas invraisemblable d'espérer trouver des conditions de polyvalence plus larges que les conditions suffisantes (12), et pour lesquelles la méthode de résolution exposée ci-dessus du système (N, 9) resterait inchangée.

DEMONSTRATIONS

2bis. - LES LIGNES DE GUIDAGE SONT DES LIGNES DE RACCORD.

D'après la théorie générale des équations aux dérivées partielles du premier ordre, toute surface $\Theta(x^\sigma) = 0$ lieu de lignes de guidage définies par le vecteur u^σ a pour équation aux dérivées partielles :

$$u^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x^\sigma} = 0$$

ou encore, en résolvant $\Theta = 0$ par rapport à t , ce qui donne $t = \theta(xyz)$:

$$(15) \quad u^k \frac{\partial \theta}{\partial x^k} - u^4 = 0$$

Si l'équation $\Theta = 0$ n'était pas résoluble en t , elle le serait forcément en x , y ou z , et le raisonnement qui va suivre serait inchangé.

Considérons alors une surface Σ , d'équation $t = \theta(xyz)$, assujettie à nulle autre condition pour l'instant, et une solution $u = f e^{i\varphi}$ de l'équation (G). Cherchons si l'on peut trouver une deuxième solution $\Psi = A e^{is}$ de l'équation (G) qui se raccorde avec u sur Σ suivant les conditions énoncées au par. 2.

Si les phases φ et s sont égales sur Σ , on sait qu'il suffit, pour que $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial s}{\partial x^\sigma}$ sur Σ , que l'on y ait : $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}$. De même, pour assurer l'égalité des dérivées secondes homologues, il suffit, compte tenu de la dernière égalité, que l'on ait $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$. Nous devons donc rechercher s'il existe une fonction complexe $A e^{is}$ vérifiant l'équation (G), c'est-à-dire les deux équations (1) et (2), et telle que l'on ait sur Σ :

$$(16) \quad \frac{A}{f} = C t e = K$$

$$\varphi = s \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

On voit d'abord, en divisant les deux membres de l'équation (2) par f , les deux membres de l'équation correspondante pour Ψ par A , et en retranchant membre, qu'on obtient :

$$(17) \quad 2 \left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho \right) \frac{\partial}{\partial x^\rho} \log \frac{A}{f} = 0$$

Comme on doit avoir $\frac{A}{f} = K$ sur Σ , $t = \theta(xyz)$ est forcément une des racines de l'équation $\log \frac{A}{f} = \log K$, et par suite, comme on le voit en divisant les deux membres de l'équation (17) par $\frac{\partial}{\partial t} \left(\log \frac{A}{f} \right)$, θ doit vérifier l'équation aux dérivées partielles (15). Σ est donc bien une surface de de Broglie, et la première partie du théorème est démontrée.

Il reste à savoir si, Σ étant une surface de de Broglie, la détermination de A et s par les équations (1), (2) et les conditions (16) est effectivement possible. On pourrait, pour le voir, calculer de proche en proche les dérivées successives de A et s et définir ces deux fonctions par des développements en série dont on montrerait qu'ils sont convergents. Il est tout aussi rapide de montrer que le problème posé, avec des conditions aux limites telles qu'il n'est pas un problème de Cauchy, peut se ramener à un problème de Cauchy.

Considérons à cet effet le problème de Cauchy ainsi posé : déterminer des fonctions A et s qui obéissent :

- aux équations indéfinies (1) et (2) :
- aux conditions aux limites sur Σ :

$$(18) \quad A = Kf \quad ; \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} + h(x^k)$$

$$s = \varphi \quad ; \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$h(x^k)$ étant une fonction donnée sur Σ .

On sait qu'un tel problème admet une solution et une seule lorsque les coefficients de (G) et les données (18) sont analytiques, à condition que Σ ne soit pas surface caractéristique de l'équation (G). Nous reviendrons sur ce point tout à l'heure ; supposons pour l'instant que Σ ne soit pas caractéristique. La solution de ce problème s'obtient par la méthode de Cauchy ; si on applique cette méthode aux équations (1) et (2) au lieu de l'appliquer à (G), on doit calculer les dérivées successives alternativement sur les deux équations : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$ par (2) et $\frac{\partial^2 A}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$ par (1), puis, en dérivant chaque équation, les dérivées troisièmes de s et A et ainsi de suite. Il nous suffit, en ce qui nous concerne, de voir ce que donne le calcul de $\frac{\partial^2 s}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$ sur Σ . Ces dérivées secondes sont données par les équations. :

$$d\left(\frac{\partial s}{\partial x^\sigma}\right) = d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}\right) \quad \text{sur } \Sigma$$

d'une part, et l'équation (2) d'autre part. En recommençant la soustraction membre que nous avons déjà pratiquée plus haut après division par f et A , on obtient :

$$(19) \quad 2\left(g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} + \gamma^\rho\right)\left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x^\rho} - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x^\rho}\right) + g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\right) = 0$$

Au premier terme figurent indifféremment $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma}$ ou $\frac{\partial s}{\partial x^\sigma}$ puisque ces quantités sont égales d'après les dernières conditions (18). Or l'égalité $A = Kf$ sur Σ entraîne :

$$(20) \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x^k} - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x^k} = -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x^k} = -h \frac{\partial \theta}{\partial x^k}$$

et l'équation (19) s'écrit :

$$2(u^4 - u^k \frac{\partial \theta}{\partial x^k})h + g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right) = 0$$

La surface Σ étant une surface de de Broglie, le premier terme est nul, et on a par conséquent sur Σ :

$$g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right) = 0$$

Cette équation, et les équations $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial s}{\partial x^\sigma}$ sur Σ , conduisent par le mode classique de calcul des dérivées secondes à déterminer $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ par l'équation :

$$(g^{ik} \frac{\partial \theta}{\partial x^i} \frac{\partial \theta}{\partial x^k} - 2g^{k4} \frac{\partial \theta}{\partial x^k} + g^{44}) \left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = 0$$

Comme Σ n'est pas surface caractéristique de (G), cette égalité entraîne $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, et par suite l'égalité de toutes les dérivées secondes homologues.

Le problème de Cauchy posé par les équations (1), (2), et les conditions (18) est donc équivalent au problème posé initialement par les équations (1), (2) et les conditions (16). Ce problème initial est donc soluble, et on voit que sa résolution dépend, lorsque $u = f e^{i\varphi}$ est donné, d'une fonction arbitraire de 3 variables $h(x^k)$.

Pour que cette résolution soit possible, il faut toutefois que la surface de de Broglie Σ ne soit pas surface caractéristique de l'équation (G). La théorie des équations aux dérivées partielles simultanées montre qu'il peut bien en être ainsi.

Dans le cas non analytique, le problème sera évidemment beaucoup plus difficile, compte tenu du fait que la surface Σ , dans les applications physiques qui nous intéressent, est une surface du genre temps. La première partie du théorème n'en reste pas moins valable.

Une question reste à examiner : les deux solutions Ψ et u ont-elles la même phase en dehors de Σ ? On montre aisément, par identification des dérivées troisièmes, qu'une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que h vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$(21) \quad u^k \frac{\partial h}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial u^4}{\partial t} - \frac{\partial u^k}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial x^k} \right) h = 0$$

Comme on peut choisir h arbitrairement, cette condition ne sera en général pas remplie, et les deux phases s et φ ne seront pas égales en dehors de Σ .

Mais, même si cette condition est satisfaite, les phases s et φ peuvent ne pas être égales en dehors de Σ . Cette égalité suppose en effet celle de toutes les dérivées successives sur Σ . Or, si on calcule les dérivées quatrième et qu'on écrive leur égalité sur Σ , on arrive à une équation qui est indépendante de (21); h doit alors obéir à deux équations aux dérivées partielles. En continuant de même, on a une équation supplémentaire en h pour chaque ordre de dérivation. Il s'ensuit qu'en général l'égalité de s et de φ en dehors de Σ ne peut être obtenue que si $s = \varphi$ appartient à une famille

particulière de fonctions. Nous retrouverons cette circonstance dans l'étude du raccord des solutions régulières et singulières.

3bis. - EXTENSION A UN TYPE D'EQUATIONS NON LINEAIRES

La forme du second membre de l'équation (M) donnée au sommaire donne immédiatement les équations de Jacobi et de continuité ; nous avons vu sur les expressions de ces dernières que seule l'équation de Jacobi était modifiée.

On en déduit que le théorème du raccord établi ci-dessus reste vrai pour deux fonctions dont l'une est solution de (G) et l'autre de (M). En fait la première partie du théorème, qui repose exclusivement sur l'utilisation de l'équation de continuité, se démontre comme précédemment. D'autre part l'équation de Jacobi n'intervient, dans la démonstration de l'infinité de solutions raccordées à une solution donnée, que pour établir l'existence d'une solution pour le problème de Cauchy (18) ; sa forme n'a donc aucune importance, pourvu que R soit une fonction analytique de ses arguments.

Les considérations concernant l'égalité des phases en dehors de Σ restent également valables.

4bis. - INTERPRETATION PHYSIQUE DES CONDITIONS DE RACCORD.

Les résultats a, b, c, énoncés au sommaire étant immédiats, nous avons seulement à démontrer le résultat d.

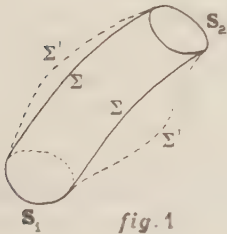
Les dérivées premières étant égales sur Σ , la condition $\frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta t^2}$ est équivalente à la condition, valable sur Σ :

$$g^{\rho\sigma} \left(\frac{\delta^2 s}{\delta x^\rho \delta x^\sigma} - \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^\rho \delta x^\sigma} \right) - g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\tau \left(\frac{\delta s}{\delta x^\tau} - \frac{\delta \varphi}{\delta x^\tau} \right) = 0$$

$\Gamma_{\rho\sigma}^\tau$ étant les symboles de Christoffel de 2ème espèce. On reconnaît dans le premier membre de cette équation le laplacien généralisé de $s - \varphi$:

$$\square(s - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta}{\delta x^\rho} \left[\sqrt{|g|} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\delta s}{\delta x^\sigma} - \frac{\delta \varphi}{\delta x^\sigma} \right) \right] = \frac{D}{Dx^\rho} \left[g^{\rho\sigma} \left(\frac{\delta s}{\delta x^\sigma} - \frac{\delta \varphi}{\delta x^\sigma} \right) \right]$$

Considérons dans l'espace-temps une surface de de Broglie Σ , que nous prendrons en forme de tube pour que l'image soit plus intuitive, deux coupes S_1 et S_2 de Σ par les plans $t = t_1$, $t = t_2$, et une surface Σ' s'appuyant sur S_1 et S_2 et infiniment voisine de Σ . Si Δ est le domaine compris entre les surfaces Σ et Σ' , le théorème de Stokes généralisé permet d'écrire :



$$\int_{\Sigma + \Sigma'} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\delta s}{\delta x^\sigma} - \frac{\delta \varphi}{\delta x^\sigma} \right) N_\rho d\Sigma = \int_{\Delta} \square(s - \varphi) d\Delta$$

N_ρ étant la normale unitaire à Σ ou Σ' orientée de manière convenable.

$\square(s - \varphi)$ étant nul sur Σ , le second membre de cette égalité tend vers zéro lorsque Σ' tend vers Σ . L'intégrale :

$$I = \int_{\Sigma} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial s}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} \right) N_\rho d\Sigma$$

qui est d'ailleurs nulle, est donc, par rapport à la même intégrale prise sur les surfaces Σ' infiniment voisines de Σ , soit extrémale, soit d'inflexion. Il est facile de voir, sur les deux cas de figure possibles, que l'intégrale I est extrémale si $\square(s-\varphi)$ change de signe au passage de Σ .

5bis. - EXAMEN DES CARACTERISTIQUES DE L'EQUATION DE JACOBI

Considérons l'équation de Jacobi :

$$(1) \quad g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + 2\gamma^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} + k - \frac{\square f}{f} = 0$$

où $\frac{\square f}{f}$ est considéré comme une donnée.

En posant $p_\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\tau}$, les caractéristiques de cette équation du premier ordre ont pour équations :

$$\frac{dx^\rho}{g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho} = - \frac{dp_\tau}{\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} p_\rho p_\sigma + \frac{\partial \gamma^\rho}{\partial x^\tau} p_\rho + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\tau} \left(k - \frac{\square f}{f} \right)} = d\lambda$$

Les équations en $\frac{dx^\rho}{d\lambda}$ sont encore les équations des lignes de guidage. Intéressons maintenant aux équations en $\frac{dp_\tau}{d\lambda}$; en introduisant les variables :

$$u^\rho = g^{\rho\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} + \gamma^\rho = g^{\rho\sigma} p_\sigma + \gamma^\rho$$

à la place des variables p_τ , la deuxième série d'équations se transforme en :

$$(22) \quad \frac{du_\tau}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau} u^\rho u^\sigma + \left(\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial x^\tau} \right) u^\rho + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\tau} \left(\frac{\square f}{f} + \gamma^\rho \gamma_\rho - k \right)$$

Par multiplication contractée par u^τ , on voit que ces équations^{admettent} pour intégrale première :

$$\frac{\square f}{f} + \gamma^\rho \gamma_\rho - k - u^\rho u_\rho = Cte$$

Si donc on connaît la phase φ d'une fonction d'onde, le vecteur tangent u^ρ des lignes de guidage de cette phase vérifie les équations (22).

Inversement donnons-nous des courbes définies par $x^\rho = x^\rho(\lambda)$, dont le vecteur tangent $u^\rho = \frac{dx^\rho}{d\lambda}$ vérifie les équations (22). Toute solution de ces équations dépend de 8 paramètres : les valeurs x^ρ_0 de x^ρ et u^ρ_0 de u^ρ pour $\lambda = 0$. Si, pour $\lambda = 0$ on assujettit u^τ_0 à vérifier les équations :

$$u_{\sigma}^{\tau} = g^{\tau\sigma}(x_0^{\rho}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\sigma}}(x_0^{\rho}) + \gamma^{\tau}(x_0^{\rho})$$

la courbe définie par les équations (22) et ces conditions initiales coïncide avec la ligne de guidage passant par le point x_0^{ρ} . Il en résulte en particulier qu'une telle solution de (22) vérifie l'équation :

$$(23) \quad u^{\rho} u_{\rho} - \left(\frac{\square f}{f} + \gamma^{\rho} \gamma_{\rho} - k \right) = 0$$

pour toute valeur de λ puisqu'elle la vérifie pour $\lambda = 0$.

Or si on considère l'intégrale, qui se présente comme une intégrale d'action :

$$I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{1}{2} g_{\rho\sigma} u^{\rho} u^{\sigma} - \gamma^{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\square f}{f} + \gamma^{\rho} \gamma_{\rho} - k \right) \right] d\lambda$$

l'application immédiate du calcul des variations montre que les courbes qui rendent stationnaire cette intégrale vérifient les équations différentielles (22). Nous pouvons donc dire que les lignes d'action stationnaire qui sont tangentes en un de leurs points à la ligne de guidage qui passe par ce point coïncident avec ces lignes de guidage.

Il est d'ailleurs facile de trouver la valeur de l'intégrale d'action lorsque cette coïncidence est réalisée. Du fait que l'équation (23) est vérifiée, l'intégrale I s'écrit :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (u^{\rho} u_{\rho} - \gamma_{\rho} u^{\rho}) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (u_{\rho} - \gamma_{\rho}) u^{\rho} d\lambda \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\rho}} u^{\rho} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\varphi}{d\lambda} d\lambda = \varphi_2 - \varphi_1 \end{aligned}$$

6bis. - PLACAGE D'UNE SOLUTION SINGULIERE SUR UNE SOLUTION REGULIERE

La démonstration du résultat annoncé au sommaire est presque immédiate. L'équation (9) étant résoluble sur la ligne de guidage L de Ψ , on prend $\omega(t) = \Omega(t) e^{i s(t)}$ et on construit, à partir de cette fonction ω et par la formule (5) du chapitre IV, une solution singulière u . En tout point de la ligne L , on a, d'après le chapitre IV, par. 3, $\varphi = s$, ce qui assure le raccord des phases. D'autre part, comme l'équation (9) est soluble quand on y a remplacé $\frac{ds}{dt}$ par $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{ds}{dt}$, les dérivées premières de φ sont définies sur L , et les résultats du chapitre IV, par. 3, montrent que l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \gamma^k &= - \frac{1}{c^2 - v^2} \left[\frac{ds}{dt} + \gamma_j v^j + \gamma_4 \right] v^k \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^4 &= - \frac{1}{c^2 - v^2} \left[\frac{ds}{dt} + \gamma_j v^j + \gamma_4 \right] v \end{aligned}$$

La comparaison de ces équations avec celles que l'on déduit facilement des équations (8) de ce chapitre montrent que l'on a $\frac{\delta \varphi}{\delta x^\sigma} = \frac{\delta g}{\delta x^\sigma}$ sur la trajectoire L.

7bis. - CONSTRUCTION D'UNE FONCTION REGULIERE APPROCHANT UNE SOLUTION SINGULIERE DE (E) .

Soit la fonction $u = \sum_{k=1}^N u_k$ la solution définie au sommaire. Il est évident qu'elle est solution de (E) puisque les u_k le sont, et que les seules singularités de u sont l'ensemble de celles des u_k .

Nous allons supposer, dans tout ce qui suit, pour simplifier le raisonnement, que N est fini ; le raisonnement ne serait que très peu modifié si les u formaient un ensemble dénombrable.

Plaçons-nous, à l'instant t , en un point M voisin d'un point singulier de u , par exemple au voisinage du point singulier A_k de u_k . Désignons pour un instant par $u' = u - u_k$ la solution totale u diminuée de u_k ; u' est régulière en A_k . Lorsque le point M tend vers A , l'expression :

$$2i \varphi(M, t) = \log \frac{u_k + u'}{u_k^* + u'^*}$$

tend vers $\lim \log \frac{u_k}{u_k^*}$ puisque seules u_k et u_k^* deviennent infinies en A_k . On a donc :

$$\varphi(A_k, t) = \varphi_k(A_k, t)$$

Une démonstration semblable vaut pour les dérivées de φ et de φ_k .

On pourrait faire sur les amplitudes des remarques analogues, à condition de parler des parties principales des amplitudes.

Considérons donc la fonction u et cherchons à lui substituer une fonction $\Psi = A e^{iS}$ qui obéisse à ces deux conditions : être régulière dans tout l'espace-temps d'une part, représenter "au mieux" du point de vue physique u dans tout l'espace-temps d'autre part.

Il faut tout de suite préciser ce qu'on entend par représenter au mieux. Portons sur un graphique $|u| = f$ en fonction de x , coordonnée figurant les 4 coordonnées de l'espace-temps, et sur un autre φ en fonction de x . Les deux courbes ont l'allure représentée sur les figures 2 et 3. La courbe représentative de f a des branches infinies en chaque point singulier. Quant à φ , sa courbe représentative peut avoir des

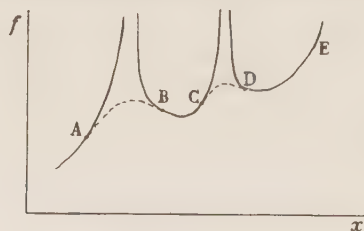


fig. 2

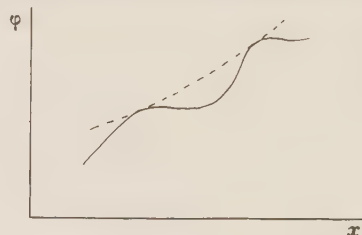


fig. 3

allures variables, et la courbe de la figure 3 a été tracée en supposant que x est une direction suivant laquelle $\frac{d\varphi}{dx}$ s'annule aux points singuliers. Mais il importe de remarquer que, dans un grand nombre de cas, la phase φ varie rapidement au voisinage d'un point singulier. En effet, en un point singulier, le point A_k par exemple, on a $\varphi = \varphi_k$; mais cette égalité provient de ce que, au point A_k , u_k est infinie. Dès qu'on s'éloigne de A_k , l'influence de u_k dans la solution totale u décroît très rapidement, puisque u_k représente une particule, d'effet négligeable par rapport à l'ensemble des particules en dehors du point singulier. A petite distance de A_k , c'est donc la phase φ' de $u' = u - u_k$ qui est prépondérante, et il est bien évident que, sauf précautions spéciales, cette phase φ' n'a aucune raison d'être voisine de φ_k . Nous devrons tenir compte de cette particularité plus loin.

On pourrait, pour former Ψ , songer à conserver la fonction phase, et substituer à f une fonction A qui serait égale à f sur les arcs tels que BC , DE , et qui remplacerait les branches infinies AB , CD , par des arcs (tracés en pointillé sur le graphique) situés à distance finie. Un tel mode de substitution est concevable, mais présente l'inconvénient, d'une part de laisser arbitraires les places A , B , où l'on effectue la coupure, d'autre part de ne fournir aucune indication sur l'équation à laquelle satisferait Ψ sur les arcs AB , CD , etc... Bien entendu, on pourrait imposer à cette équation d'être précisément (E), c'est-à-dire la même que celle qu'on conserverait sur les arcs BC , DE ; nous savons que l'opération est parfaitement possible, d'après ce qui a été démontré au début de ce chapitre, pourvu que les tubes d'espace-temps (représentés ici par les couples de points AB , CD) enfermant les singularités soient des tubes de guidage. Mais, outre qu'on ne peut savoir a priori si Ψ sera régulière à l'intérieur des tubes quand on emploie cette méthode, il y aurait sûrement discontinuité de l'amplitude le long des tubes de raccord.

On pourrait à un autre mode de définition de Ψ : celui qui serait rigoureusement inverse du mode de construction que nous venons d'employer des solutions singulières à partir d'une solution régulière. Il consisterait à considérer la fonction s et ses dérivées comme données et égales à φ et ses dérivées sur toutes les lignes L_k , puis à se donner l'amplitude A par une condition supplémentaire quelconque, Ψ devant être régi par l'équation (E). La condition qui porte sur les phases ressemble à une condition de Cauchy, et elle en serait une en effet si on remplaçait les lignes L_k par des tubes T_k ; on pourrait alors définir la phase dans tout l'espace-temps par la méthode de Cauchy ou celle de Hadamard. Malheureusement on se trouve en présence de trois obstacles : la méthode de Cauchy ne fournit que des solutions locales ; celle de Hadamard n'est au point que pour des conditions de Cauchy portées par une variété du genre espace, alors que les T_k sont du genre temps ; enfin, dans l'une ou l'autre méthode, on ne sait pas ce que devient la solution lorsque les tubes T_k se contractent et tendent vers les lignes L_k (à moins, comme nous l'avons vu aux chapitres II et III, que l'amplitude ne soit singulière, ce que nous voulons précisément éviter).

Dans le même ordre d'idées, on pourrait prendre $s = \varphi$, non plus seulement sur les lignes L_k , mais dans tout l'espace-temps. On tombe alors sur un problème que nous étudierons de plus près tout à l'heure, celui qui consiste à rechercher les fonctions d'onde dont la phase est donnée ; nous allons pour l'instant le laisser de côté.

Il est une troisième méthode pour définir Ψ à partir de u , celle qui a été proposée au sommaire : Ψ est la moyenne de u dans un volume petit, mais fini.

Examinons tout de suite la manière dont Ψ ainsi défini représente u . Considérons pour cela un domaine $\omega(m)$ à l'instant t ; ce domaine renferme un certain nombre de singularités, petit par rapport à N , et se trouve dans le voisinage im-

médiat d'un certain nombre d'autres. Mettant à part ces deux sortes de singularités, considérons la solution u'' qui correspond à l'ensemble de toutes les autres. u'' varie lentement, en amplitude comme en phase, dans $\omega(m)$, de sorte que sa moyenne lui est sensiblement égale. Par ailleurs l'intégrale de la somme des fonctions $u_1, u_2, \dots$ qui correspondent aux singularités intérieures à $\omega(m)$ ou voisines de ce domaine est négligeable par rapport à celle de u'' , si la collection de particules est très nombreuse et si ces particules sont physiquement identiques, cette dernière condition conduisant, comme nous l'avons fait, à prendre les fonctions ω et Ω dans une famille continue. En effet, u'' est de l'ordre de $\frac{nV\Omega}{\omega R}$, V étant le volume occupé par toutes les particules, n le nombre moyen de particules intérieures à un domaine ω , R une distance moyenne de m aux diverses particules : l'intégrale de u'' est donc de l'ordre de $nV\Omega/R$. L'intégrale de la somme $u_1 + u_2 + \dots$ est de l'ordre de $n\Omega\omega^{2/3}$, donc bien négligeable devant la précédente.

Ψ est donc voisin de u'' . En ce qui concerne les amplitudes, comme l'effet des singularités intérieures à $\omega(m)$ est, dans la somme u , négligeable en dehors des points singuliers, on peut en déduire $\Psi \neq f$. Par contre, en ce qui concerne les phases, comme nous avons vu plus haut que la phase de u est sans rapport obligé avec celle des fonctions $u_1, u_2, \dots$, s peut être différent de $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ c'est-à-dire de φ . Il y a un cas où s sera sensiblement égal à φ (sans que l'on puisse dire que ce soit le seul), c'est le cas où la phase de chaque solution singulière u_k sur sa propre ligne singulière y est égale à la phase de la solution restante $u - u_k$. C'est ce cas qui retiendra notre attention plus loin.

Le raisonnement qui précède ne fait que rappeler (les questions de phase mises à part) ce qui est sous-entendu dans la théorie du potentiel newtonien, lorsqu'on remplace la distribution réelle discrète des masses électriques par une distribution continue fictive. Il est vrai que, dans la théorie du potentiel newtonien, on ne passe pas par l'opération de moyenne, et qu'on définit directement par une intégrale le potentiel de la distribution continue ; mais il est facile de se rendre compte que les deux définitions sont équivalentes, rigoureusement dans le cas du potentiel newtonien, sensiblement dans le cas de la fonction Ψ .

Pour éviter des longueurs, nous ne donnerons pas les démonstrations, qui sont assez élémentaires. Disons simplement que les deux définitions de Ψ : celle qui repose sur l'opération de moyenne, et celle que l'on obtient par intégration d'une distribution continue de fonctions singulières, donnent le même résultat lorsqu'on néglige la variation de la fonction $\mu(\mathbf{M}, t; A, \theta)$ pour des variations des points M et A à l'intérieur de domaines ω .

Equation de la fonction Ψ .

Nous allons maintenant étudier les dérivées partielles de Ψ et former :

$$\mathcal{L}\Psi = \square\Psi + 2b^p \frac{\partial\Psi}{\partial x^p} - k\Psi$$

Raisonnons d'abord sur une singularité unique, et considérons l'intégrale :

$$(24) \quad \Psi(m, t) = \frac{1}{\omega} \int_{\omega(m)} u(\mathbf{M}, t) d\omega_{\mathbf{M}}$$

$u(M, t)$ étant la solution singulière construite sur une trajectoire donnée $C(A, \theta)$ et une fonction donnée $\omega(\theta)$. Nous désignerons par ξ^k les coordonnées de m , conservant la notation x^k pour celles de M .

Supposons d'abord que $\omega(m)$ ne renferme pas le point singulier $A(t)$. L'intégrale (24) est alors définie sans aucune difficulté. Sa variation dans un déplacement $\delta \vec{m}$ de m s'obtient en déplaçant, à l'instant t , chaque point M de ω de $\delta \vec{m}$, et en formant la variation correspondante de u ; les dérivées spatiales de Ψ s'obtiennent donc en dérivant sous le signe $\int$ par rapport à x^k . Quant à la dérivée $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$, elle s'obtient par le même procédé. On a donc :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^p} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega(m)} \frac{\partial u}{\partial x^p} d\omega_M \quad \xi^4 = x^4 = t$$

Le calcul des dérivées secondes se fait de la même manière. On aura par conséquent :

$$(25) \quad \mathcal{L}\Psi = \frac{1}{\omega} \int_{\omega(m)} \left[\square u + 2b^p(\xi^\sigma) \frac{\partial u}{\partial x^p} - k(\xi^\sigma) u(x^p) \right] d\omega_M$$

La quantité sous le signe $\int$ ne fait pas encore apparaître $\mathcal{L}u$ puisque les coefficients b^p et k sont fonctions des ξ^σ et non des x^σ . En faisant apparaître $\mathcal{L}u = 0$, on voit que l'on a :

$$(26) \quad \mathcal{L}\Psi = \frac{1}{\omega} \int_{\omega(m)} \left\{ 2 \left[b^p(\xi^\sigma) - b^p(x^\sigma) \right] \frac{\partial u}{\partial x^p} - \left[k(\xi^\sigma) - k(x^\sigma) \right] u \right\} d\omega$$

Supposons maintenant que $\omega(m)$ renferme le point singulier $A(t)$. Les différentes intégrales que l'on vient d'étudier ont alors un élément différentiel infini en ce point. Il est donc nécessaire de prendre quelques précautions.

Les quantités infinies sont introduites d'abord par le premier terme de u :

$$u_0 = \frac{\omega U}{\rho(c - v_p)}$$

le second terme $u_1 = -2 \int \omega u d\theta$ n'introduisant de quantités infiniment grandes qu'à partir des dérivées secondes. Si on sépare Ψ en les deux quantités correspondantes Ψ_0 et Ψ_1 , on verrait néanmoins que l'équation (25) reste valable pour Ψ_1 , les dérivées secondes de u_1 n'étant infinies que comme $1/\rho$.

Considérons Ψ_0 . L'intégrale de u_0 est convergente puisque l'élément différentiel est en $1/\rho$, ρ étant la distance MA_1 qui, d'après l'équation (19) du chapitre I, est du même ordre que r , distance de M à $A(t)$.

L'intégrale des dérivées premières de u_0 est également convergente. On a en effet, en reprenant les notations du chapitre IV, par. 3bis :

$$(27) \quad \frac{\partial u_0}{\partial x^p} = \frac{1}{D} \frac{d(\omega U)}{dx^p} - \frac{\omega U}{D^2} \frac{dD}{dx^p}$$

On a calculé, dans ce même par. 3bis du chapitre IV, les quantités $\frac{d\mathbf{D}}{dx^p}$ et on y a vu qu'elles étaient finies ; $\frac{\partial u_0}{\partial x^p}$ devient donc infini comme $1/D^2$, c'est-à-dire comme $1/r^2$, et les intégrales de $\partial u_0 / \partial x^p$ sont bien convergentes. Les dérivées $\frac{\partial \Psi}{\partial x^p}$ existent donc dans tous les cas, et on les obtient par dérivation sous le signe $\int$.

Il en va autrement pour les dérivées secondes dont certains termes sont en $1/D^3$: les intégrales correspondantes ne sont plus convergentes. On emploiera alors la méthode bien connue de la théorie du potentiel newtonien. Pour les dérivées spatiales on peut écrire :

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial x^k} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{\partial u_0}{\partial x^k} d\omega = \frac{1}{\omega} \int_{\mathbf{S}} u_0 n_k d\mathbf{S}$$

$\mathbf{S}$ étant la surface frontière de ω et n_k la normale extérieure à cette surface. L'intégrale de surface est parfaitement définie et on peut la dériver sous le signe $\int$, de sorte que l'on obtient :

$$(28) \quad \Delta \Psi_0 = \frac{1}{\omega} \int_{\mathbf{S}} \frac{\partial u_0}{\partial x^k} n_k d\mathbf{S}$$

Considérons maintenant $\frac{\partial \Psi_0}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{\partial u_0}{\partial t} d\omega$$

$\frac{\partial u_0}{\partial t}$ étant donné par l'équation (27) prise pour $x^4 = t$. D'après le par. 3bis du chapitre IV, on trouvera facilement :

$$\frac{d\mathbf{D}}{d\tau} = - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^k} v^k - (x^k - \alpha^k) \frac{dv^k}{d\tau}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de $\frac{d}{dx^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial \tau}{\partial x^k} \frac{d}{d\tau}$, et de la valeur de $\frac{\partial \tau}{\partial x^k}$:

$$-\frac{c}{c - v_p} \frac{d\mathbf{D}}{d\tau} = - v^k \frac{d\mathbf{D}}{dx^k} - (x^k - \alpha^k) \frac{dv^k}{d\tau}$$

Le premier membre n'est autre que $\frac{d\mathbf{D}}{dt}$. Il vient par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left[\frac{1}{\mathbf{D}} \frac{d(\omega \mathbf{U})}{dt} + \frac{\omega \mathbf{U}}{\mathbf{D}^2} (x^k - \alpha^k) \frac{dv^k}{d\tau} - \omega \mathbf{U} v^k \frac{d}{dx^k} \left(\frac{1}{\mathbf{D}} \right) \right] d\omega \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left[\frac{1}{\mathbf{D}} \frac{d(\omega \mathbf{U})}{dt} + \frac{\omega \mathbf{U}}{\mathbf{D}^2} (x^k - \alpha^k) \frac{dv^k}{d\tau} + \frac{1}{\mathbf{D}} \frac{d}{dx^k} (\omega \mathbf{U} v^k) \right] d\omega \\ &\quad - \frac{1}{\omega} \int_{\mathbf{S}} \frac{\omega \mathbf{U}}{\mathbf{D}} n^k n_k d\mathbf{S} \end{aligned}$$

L'élément différentiel de l'intégrale de volume est de toute évidence en $1/r$, et peut donc être dérivé tout en assurant la convergence ; l'intégrale de surface est bien définie et peut être dérivée sous le signe $\int$. On obtient donc, en tenant compte de (28) :

$$(29) \quad \square \Psi_0 = -\frac{1}{\omega} \frac{1}{c^2} \int_{\omega} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{D} \frac{d(\omega \mathbf{U})}{dt} + \frac{\omega \mathbf{U}}{D^2} (x^k - \alpha^k) \frac{dv^k}{d\tau} + \frac{1}{D} \frac{d}{dx^k} (\omega \mathbf{U} v^k) \right] d\omega \\ + \frac{1}{\omega} \int_{\mathbf{S}} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega \mathbf{U} v^k}{D} \right) \right] n_k d\mathbf{S}$$

Nous allons calculer l'intégrale de surface sur une sphère infiniment petite Σ de rayon R centrée en $A(t)$. Les seuls termes donnant un résultat d'intégration non nul sont les termes en $1/D^2$ dont l'expression est :

$$-\left(\frac{\omega \mathbf{U}}{D^2} \frac{d\mathbf{D}}{dx^k} + \frac{\omega \mathbf{U} v^k}{c^2 D^2} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) n_k = -\frac{\omega \mathbf{U}}{D^2} \left[\frac{d\mathbf{D}}{dx^k} + \frac{d\mathbf{D}}{d\tau} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^k} + \frac{v^k}{c^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \right] n_k$$

En tenant compte des valeurs trouvées au chapitre IV, par. 3bis, de $\frac{d\mathbf{D}}{d\tau}$, et en laissant tomber le terme en $(x^k - \alpha^k) \frac{dv^k}{d\tau}$, qui est d'ordre 1 en $1/D$, l'expression précédente prend pour valeur :

$$-\frac{\omega \mathbf{U}}{D^2} (c^2 - c v_p - \frac{d\mathbf{D}}{d\tau}) \frac{c(x^k - \alpha^k) - \rho v^k}{c(\rho(c - v_p))} n_k = -\omega \mathbf{U} \frac{c^2 - v^2}{c} \frac{c(x^k - \alpha^k) - \rho v^k}{[\rho(c - v_p)]^3} n_k$$

avec $\omega = \omega(\tau)$, $v = v(\tau)$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x^\sigma, \alpha^\sigma)$. On peut, dans ces trois fonctions, faire $\tau = t$, $x^\sigma = \alpha^\sigma$, ce qui introduit sur elles une erreur de l'ordre de ρ , donc sur l'expression à intégrer une erreur de l'ordre de $1/D$ dont l'intégrale tend vers zéro avec R . On aura donc :

$$\lim \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega \mathbf{U} v^k}{D} \right) \right] n_k d\mathbf{S} = -\omega(t) \frac{c^2 - v^2}{c} \int_{\Sigma} \frac{c(x^k - \alpha^k) - \rho v^k}{[\rho(c - v_p)]^3} n_k d\mathbf{S}$$

Recourons alors aux calculs faits au chapitre I, par. 6bis, et aux notations de ce chapitre. Nous y avons vu que :

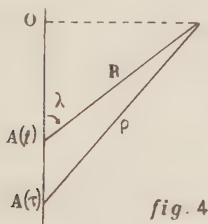


fig. 4

$$A_{\tau O} = R \frac{c \cos \lambda + \beta \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \lambda}}{1 - \beta^2}$$

$$\rho = R \frac{\beta \cos \lambda + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \lambda}}{1 - \beta^2}$$

$$\rho(c - v_p) = c R \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \lambda}$$

ce qui donne :

$$\int_{\Sigma} \frac{c(x^k - \alpha^k) - \rho v^k}{[\rho(c - v_p)]^3} n_k d\mathbf{S} = \frac{2\pi}{c^2} \int_0^\pi \frac{\sin \lambda d\lambda}{(1 - \beta^2 \sin^2 \lambda)^{3/2}} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

et par conséquent :

$$(30) \quad \lim_{\Sigma} \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega \mathbf{U} v^k}{\mathbf{D}} \right) \right] n_k d\Sigma = - \frac{4\pi}{c} \omega(t)$$

Revenons alors à l'expression (29) de $\square \Psi_0$. Nous pouvons écrire, en introduisant la sphère Σ et en désignant par ω' le domaine compris entre S et Σ :

$$\begin{aligned} \square \Psi_0 = & - \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\mathbf{D}} \frac{d(\omega \mathbf{U})}{dt} + \frac{\omega \mathbf{U}}{\mathbf{D}^2} (x^k - \alpha^k) \frac{dv^k}{d\tau} + \frac{1}{\mathbf{D}} \frac{d}{dx^k} (\omega \mathbf{U} v^k) \right] d\omega \\ & + \frac{1}{\omega} \int_{\omega'} \frac{\partial u_0}{\partial x^k} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega \mathbf{U} v^k}{\mathbf{D}} \right) \right] d\omega \\ & + \frac{1}{\omega} \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega \mathbf{U} v^k}{\mathbf{D}} \right) \right] n_k d\Sigma \end{aligned}$$

Il est évident que la somme des deux premiers éléments différentiels de volume doit être égale à $\square u_0$; on peut d'ailleurs aisément le vérifier en refaisant en sens inverse les calculs qui ont eu pour but d'intégrer $\frac{\partial u_0}{\partial t}$ par parties. ω'' étant le domaine intérieur à Σ , on a donc :

$$\begin{aligned} \square \Psi_0 = & \frac{1}{\omega} \int_{\omega''} \square u_0 d\omega - \frac{1}{\omega} \int_{\omega''} \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\mathbf{D}} \frac{d(\omega \mathbf{U})}{dt} + \frac{\omega \mathbf{U}}{\mathbf{D}} (x^k - \alpha^k) \frac{dv^k}{d\tau} + \frac{d}{dx^k} (\omega \mathbf{U} v^k) \frac{1}{\mathbf{D}} \right] d\omega \\ & + \frac{1}{\omega} \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega \mathbf{U} v^k}{\mathbf{D}} \right) \right] n_k d\Sigma \end{aligned}$$

soit finalement, en faisant tendre R vers zéro :

$$\square \Psi_0 = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \square u_0 d\omega - \frac{4\pi}{c} \frac{\omega(t)}{\omega}$$

On peut alors former $\mathfrak{L}\Psi_0$. En y ajoutant la valeur de $\mathfrak{L}\Psi_1$ donnée par l'équation (26), on obtient :

$$\mathfrak{L}\Psi(m, t) = - \frac{4\pi}{c} \frac{\omega(t)}{\omega} + \frac{1}{\omega} \int_{\omega(m)} \left\{ 2 \left[b^p(\xi^\sigma) - b^p(x^\sigma) \right] \frac{\partial u}{\partial x^p} - \left[k(\xi^\sigma) - k(x^\sigma) \right] u \right\} d\omega$$

Faisons l'approximation qui consiste à négliger $b^p(\xi^\sigma) - b^p(x^\sigma)$ et $k(\xi^\sigma) - k(x^\sigma)$. D'après la signification des coefficients b^p et k , on voit qu'il faut pour cela supposer que les champs appliqués varient très lentement à l'intérieur du volume ω , c'est-à-dire que ces champs varient très lentement sur une distance égale à la longueur d'onde associée à la particule, puisque nous avons supposé que les dimensions de ω sont petites par rapport à cette longueur d'onde. Nous apercevons ainsi les limites de validité de cette approximation.

L'équation qui gouverne Ψ s'écrit alors :

$$(31) \quad \mathfrak{L}\Psi + \frac{4\pi}{c} \frac{\omega(t)}{\omega} = 0$$

Elle est valable pour tout point m dont la densité moyenne de singularités est égale à 1 ; quand cette densité est nulle, c'est l'équation :

$$(32) \qquad \mathcal{L}\Psi = 0$$

qui est valable.

Si maintenant nous envisageons le cas général d'une collection de singularités, les équations (31) et (32) prennent la même forme :

$$\mathcal{L}\Psi + \frac{4\pi}{c} \frac{\sum \omega_k(t)}{\omega} = 0$$

la somme $\sum \omega_k(t)$ s'étendant à toutes les singularités qui sont, à l'instant t , intérieures au domaine $\omega(m)$. Dans l'hypothèse où nous nous sommes placés où les trajectoires réelles L_k et les fonctions ω_k font partie d'une famille continue de trajectoires et de fonctions, on peut écrire l'équation valable en tout point :

$$(33) \qquad \mathcal{L}\Psi(m,t) + \frac{4\pi}{c} \sigma \omega = 0$$

8bis. - FORMATION D'UNE EQUATION NON LINEAIRE ET THEOREME DE RACCORD

Pour les raisons qui ont été évoquées dans le par. précédent, nous allons maintenant supposer que les solutions singulières u_k sont telles que leurs phases obéissent aux conditions (11). On voit immédiatement que cette hypothèse suffit à aplanir la courbe représentative de φ en fonction de x , qui devient alors du type tracé en pointillé sur la figure 3. D'après ce que nous avons vu sur la représentation approchée de u par Ψ , on a alors en tout point de l'espace-temps $s \# \varphi$, $\frac{\partial s}{\partial x} \# \frac{\partial \varphi}{\partial x}$. Ces égalités approchées deviendraient rigoureuses si, au lieu de la définition de Ψ par la moyenne, nous prenions la définition qui repose sur l'intégration des fonctions singulières affectées de la densité σ . De toutes manières le passage à l'égalité rigoureuse suppose que le volume d'intégration ω , dans lequel on fait la moyenne de u ou bien on calcule la densité σ , est infiniment petit par rapport à la longueur d'onde du phénomène.

Admettons l'égalité rigoureuse. Sur chaque trajectoire L_k , on a : $\omega_k = \Omega_k e^{i\zeta_k} = \Omega_k e^{i\varphi_k} = \Omega_k e^{i\varphi} = \Omega_k e^{is}$. On peut encore admettre que le premier et le dernier membre de ces égalités resteront égaux en dehors des trajectoires réelles L_k . En reprenant la notation Ω pour les trajectoires de la famille continue, nous aurons en définitive, pour nouvelle forme de l'équation (33) :

$$(34) \qquad \mathcal{L}\Psi + \frac{4\pi}{c} \sigma \Omega e^{is} = 0$$

Cette équation ressemble au type que nous avons envisagé au par. 3. La forme de l'équation de continuité reste donc celle qu'on déduit de l'équation linéaire (E), et par conséquent, en désignant par s^f le vecteur impulsion d'espace-temps des lignes de guidage de Ψ , par $w^k = \frac{s^k}{s^4}$ le vecteur vitesse, et par $\rho = A^2 s^4$ la densité de l'onde Ψ , on a :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial w^k}{\partial x^k} = 0$$

Enfin, comme on a $w^k = v^k$ sur toute trajectoire L_k , on peut admettre que cette égalité reste vraie sur toute trajectoire de la famille continue. La densité des singularités obéit évidemment à une équation de continuité :

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\sigma \frac{\partial v^k}{\partial x^k} = -\sigma \frac{\partial w^k}{\partial x^k}$$

La comparaison de cette équation et de la précédente nous donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{\sigma} \right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\rho}{\sigma} = Cte = K$$

sur chaque ligne de guidage. L'équation (34) s'écrit alors :

$$\Delta \Psi + \frac{4\pi}{c} \frac{\Omega}{K} \Lambda^2 s^4 e^{is} = 0$$

K est une quantité qui reste constante sur chaque ligne de guidage, mais peut évidemment varier d'une ligne de guidage à une autre. Elle est déterminée par la connaissance de sa valeur en tout point de l'espace à l'instant initial.

Enfin, comme on sait que l'équation intégrale (9) ne détermine Ω qu'à une constante multiplicative près, on peut, tout au moins pour obtenir un type général d'équation non linéaire (et non pas pour obtenir l'équation de n'importe quelle fonction Ψ moyenne de u), faire entrer la constante K dans Ω , de sorte que nous obtenons alors l'équation (N) écrite au sommaire.

La démonstration du théorème de raccord est maintenant immédiate. Supposons qu'on connaisse une solution Ψ, Ω du système (N, 9). Donnons-nous une solution singulière dont les trajectoires soient des lignes de guidage de Ψ . Les phases s et φ et leurs dérivées premières homologues seront égales sur les trajectoires par hypothèse, et nous supposons qu'il en est de même des fonctions $|\omega|$ associées à la solution singulière et Ω provenant du système (N, 9). D'après l'équation (34) la moyenne Ψ' de la solution singulière vérifie l'équation :

$$\Delta \Psi' + \frac{4\pi}{c} \sigma \Omega e^{is} = 0$$

et, comme on suppose $\Psi = \Psi'$, il en résulte : $\sigma = \Lambda^2 s^4$.

9. - SOLUTIONS A PHASES POLYVALENTES

Soit une équation d'onde linéaire (E). Pour la commodité des écritures nous emploierons la notation $g^{\rho\sigma}$ pour le tenseur métrique bien qu'il s'agisse du tenseur de la relativité restreinte. On verrait d'ailleurs facilement que les résultats qui vont être mis en évidence peuvent être étendus à une métrique générale.

Nous nous posons le problème : quelles sont les conditions à imposer à une fonction φ pour que (E) admette une infinité de solutions de la forme $f e^{i\varphi}$ (nous ne préoccupons pas pour l'instant de la régularité des solutions) ? L'équation (E) complexe se séparant en les deux équations réelles (1) et (2) où la seule inconnue est f , on voit que le problème posé est celui de la compatibilité de ces deux équations.

On sait que ce problème, très ardu, est théoriquement résoluble dans le cas où, en dérivant autant de fois qu'il est nécessaire le système (1, 2), il est possible de résoudre le système obtenu par rapport à toutes les dérivées de l'ordre le plus élevé. Pour appliquer ici cette méthode, il serait nécessaire de pousser les dérivations de f jusqu'au 6ème ordre, qui comporte 84 dérivées, en dérivant 4 fois l'équation (1), ce qui donne 35 équations, et 5 fois l'équation (2), ce qui en donne 56, soit au total 91 équations. Il faudrait ensuite rechercher les conditions de comptabilité de ces 91 équations à 84 inconnues. Ces chiffres laissant prévoir des calculs inextricables, il vaut mieux s'adresser à une autre méthode.

On remarque que l'équation (2), considérée comme équation en f , est intégrable : c'est une constatation évidente sur la forme (4) de cette équation. L'intégration d'une ligne de guidage de φ donne :

$$\log \frac{f}{f_0} + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \square \varphi d\lambda = 0$$

f_0 étant la valeur de f pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire la valeur que prend f sur une hypersurface de l'espace-temps. En substituant la valeur de f tirée de l'équation précédente dans l'équation (1), on obtient une équation aux dérivées partielles en f_0 , dont il restera à reconnaître si elle peut être ou non vérifiée.

Pour faire cette substitution il est indiqué, d'après la méthode même d'intégration de l'équation (2), de prendre les lignes de guidage pour lignes coordonnées. Les équations finies de ces lignes, obtenues à partir de leurs équations différentielles (3), sont de la forme :

$$(35) \quad x^\rho = x^\rho(\xi^k, \lambda) \quad k = 1, 2, 3$$

chaque ligne de guidage étant définie par la variation de λ à ξ^k constants. Ce sont les variables ξ^k, λ que nous utiliserons, en les désignant aussi par ξ^ρ . Bien entendu les ξ^ρ seront choisies de manière que le jacobien $\frac{\mathbf{D}(x^\rho)}{\mathbf{D}(\xi^\sigma)}$ ne soit pas nul.

Dans le changement de coordonnées, les composantes $g^{\rho\sigma}$ se transforment en des composantes $G^{\alpha\beta} = g^{\rho\sigma} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma}$; les composantes vectorielles u^ρ se transforment en des composantes U^ρ dont les 3 premières sont $U^k = \frac{d\xi^k}{d\lambda} = 0$, et la quatrième $U^* = \frac{d\lambda}{d\lambda} = 1$; les composantes vectorielles γ^ρ se transforment en des composantes $\Gamma^\rho = \gamma^\sigma \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\sigma}$; enfin le dalembertien $g^{\rho\sigma} \frac{\delta^2}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$ se transforme en le dalembertien

$G^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} + 2 B^\rho \frac{\partial}{\partial \xi^\rho}$, B^ρ étant une fonction bien connue des dérivées des $G^{\alpha\beta}$. Le système (1, 2) s'écrit maintenant :

$$(36) \quad G^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^\rho \partial \xi^\sigma} + 2(B^\rho + i \Gamma^\rho \frac{\partial f}{\partial \xi^\rho}) = P f$$

$$(37) \quad 2 \frac{\partial f}{\partial \lambda} + Q f = 0$$

en ayant posé, pour alléger les écritures :

$$P = G^{\rho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\sigma} + 2 \Gamma^\rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\rho} + K$$

$$Q = \square \psi = G^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^\rho \partial \xi^\sigma} + 2 B^\rho \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\rho}$$

Posons enfin :

$$\log F(\xi^\rho) = - \frac{1}{2} \int_0^\lambda Q d\lambda$$

En substituant $f = f_0 F$ dans l'équation (36) et en remarquant que f_0 ne dépend que des ξ^k , l'équation (36) devient, après division par F :

$$G^{ik} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + 2(B^k + i \Gamma^k + \frac{G^{k\sigma}}{F} \frac{\partial F}{\partial \xi^\sigma}) \frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} + \left[\frac{G^{\rho\sigma}}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^\rho \partial \xi^\sigma} + 2 \frac{B^\rho + i \Gamma^\rho}{F} \frac{\partial F}{\partial \xi^\rho} - P \right] f_0 = 0$$

que nous écrirons, par économie d'écritures :

$$(38) \quad G^{ik} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + 2 H^k \frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} + J f_0 = 0$$

Pour que le système (36, 37) admette une infinité de solutions en amplitude, il faut et il suffit que cette équation admette une infinité de solutions en λ . Or f_0 doit être fonction des seules variables ξ^k , tandis qu'en général les coefficients G^{ik} , H^k , J sont en outre fonctions de λ . On peut donc s'attendre à ce que, si φ et par conséquent le changement de coordonnées (35) ont été choisis de manière quelconque, l'équation (38) n'ait pas d'autre solution que $f_0 = 0$.

Dans quels cas en sera-t-il différemment ? L'équation (38), si elle est vérifiée, doit l'être quel que soit λ ; toutes les équations dérivées par rapport à λ jusqu'à l'ordre infini :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G^{ik}}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + 2 \frac{\partial H^k}{\partial \lambda} \frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} + \frac{\partial J}{\partial \lambda} f_0 = \\ (A) \quad & \frac{\partial^2 G^{ik}}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + 2 \frac{\partial^2 H^k}{\partial \lambda^2} \frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} + \frac{\partial^2 J}{\partial \lambda^2} f_0 = \end{aligned}$$

doivent donc être également vérifiées. Il suffit d'ailleurs qu'elles le soient pour une valeur quelconque de λ , par exemple $\lambda = 0$.

Considérons pour un instant $\frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k}$, $\frac{\partial f_0}{\partial \xi^k}$, f_0 comme des inconnues indépendantes, au nombre de 10. De deux choses l'une :

- ou bien le système linéaire et homogène (A,38) comporte au moins 10 équations indépendantes pour toute valeur de ξ^k et la valeur de λ choisie ; il n'admet alors que la solution nulle, en particulier $f_0 = 0$.

- ou bien ce système se réduit à $n \leq 9$ équations indépendantes. On a alors un système de n équations aux dérivées partielles indépendantes de λ en f_0 . Les conclusions peuvent être ici très variées.

Supposons par exemple $n = 9$. Toutes les dérivées de f_0 s'expriment en fonction de f_0 par des équations de la forme :

$$\frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} = M_k f_0 \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} = M_{ik} f_0$$

les coefficients M_k et M_{ik} étant des fonctions des ξ^j . Les 3 premières équations forment une équation aux différentielles totales exactes ; si les conditions d'intégrabilité sont vérifiées, elle admet une seule solution à une constante multiplicative près. Dans ce cas, il faut encore que les équations en $\frac{\partial f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k}$ soient vérifiées par la solution f_0 ainsi déterminée.

A l'opposé, on peut avoir $n = 1$. On voit immédiatement qu'il faut et il suffit pour cela que l'on ait les équations, valables quel que soit λ :

$$(12) \quad \frac{1}{G^{ik}} \frac{\partial G^{ik}}{\partial \lambda} = \frac{1}{H^k} \frac{\partial H^k}{\partial \lambda} = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \lambda} = \mathcal{K}$$

le rapport commun $\mathcal{K}$ étant indépendant des indices i et k . Dans ce cas, il ne reste plus, pour déterminer f_0 , que l'équation (38) prise pour une valeur particulière quelconque de λ , équation qui admet dès lors une infinité de solutions régulières, et, comme nous le verrons ci-dessous, une infinité de solutions singulières.

C'est là le seul cas où il semble que l'on puisse, dans l'état actuel des connaissances mathématiques, porter un jugement certain. Dès que $n = 2$, on retombe sur le difficile problème de la compatibilité des équations aux dérivées partielles. Qu'il puisse exister des cas où le système des n équations aux dérivées partielles admette au moins une solution n'est pas douteux : il suffit pour s'en rendre compte de déterminer une solution ψ_0 de l'équation (E), par exemple par des conditions de Cauchy, et de prendre pour φ la phase de cette solution ; on est sûr que le système (A) admettra bien $|\psi_0|$ pour solution. Mais nous ne savons pas pour autant la valeur de n ; nous ne savons pas davantage si, en dehors de cette solution $|\psi_0|$, l'équation (38) admettra d'autres solutions. Il faut en outre remarquer que, contrairement à ce qui se passe d'habitude en analyse, il nous est indifférent que les solutions soient régulières ou non ; ce sont même les solutions singulières qui nous intéressent le plus, et ce point de vue risque de changer totalement la face des choses.

Il n'est également pas douteux que la fonction φ puisse être telle qu'il n'existe aucune solution f_0 correspondante. Un exemple permet de s'en rendre compte.

Prenons, pour l'équation $\square u - k^2 u = 0$, la phase :

$$\varphi = \alpha t - \frac{r^2}{2\beta}$$

En faisant le changement de coordonnées indiqué plus haut on trouvera, pour équations des lignes de guidage :

$$x^k = \xi^k e^{-\frac{\lambda}{\beta}} ; \quad t = \frac{\alpha}{c^2} \lambda$$

et, pour l'équation (38) en f_0 :

$$e^{\frac{2\lambda}{\beta}} \Delta f_0 - \left[\frac{c^2}{\alpha^2 \beta^2} \xi^i \xi^k \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + \frac{4c^2}{\alpha^2 \beta^2} \xi^k \frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} + \left(\frac{9c^2}{4\alpha^2 \beta^2} + k - \frac{\alpha^2}{c^2} \right) f_0 \right] - e^{-\frac{2\lambda}{\beta}} \sum \frac{(\xi^k)^2}{\beta^2} f_0 = 0$$

Pour que cette équation soit vérifiée par $f_0(\xi^k)$ quel que soit λ , il est nécessaire que

$$e^{\frac{2\lambda}{\beta}} \Delta f_0 - e^{-\frac{2\lambda}{\beta}} \sum \frac{(\xi^k)^2}{\beta^2} f_0$$

soit indépendant de λ , et on vérifie que cette condition entraîne bien $f_0 = 0$.

On peut d'ailleurs montrer en toute rigueur que l'on peut choisir les coefficients $G^{\rho\sigma}$, Γ^ρ , k , ce qui entraîne le choix de φ à une constante près, de telle manière que (38) n'ait pas d'autre solution que $f_0 = 0$, et ceci que la métrique $G^{\rho\sigma}$ (ou $g^{\rho\sigma}$) soit euclidienne ou non.

Nous allons donc nous rabattre sur le seul cas qui nous soit actuellement accessible, le cas où les équations (12) sont satisfaites. L'équation (38) - qu'on peut multiplier par $e^{-\frac{2\lambda}{\beta}}$ si l'on veut rendre ses coefficients indépendants de λ ; admet alors une infinité de solutions régulières dépendant d'une fonction arbitraire de 2 variables puisque cette équation est du type elliptique.

Elle admet également une infinité de solutions singulières. Il suffit pour s'en rendre compte de lui appliquer la méthode d'Hadamard de détermination des "solutions élémentaires", valable aussi pour les équations elliptiques. M. Hadamard a montré qu'une équation telle que (38) admet des solutions de la forme :

$$\frac{U(\xi^i, \alpha^k)}{\sqrt{\Gamma(\xi^i, \alpha^k)}}$$

α^k et ξ^i étant deux points de l'espace ξ^i , le premier fixe, le deuxième variable, U étant une fonction régulière, et Γ le carré de la distance géodésique (dans la métrique G^{ik}) du point α^k au point ξ^i . On voit immédiatement sur une telle forme que :

- cette solution admet le point α^k comme point singulier, point singulier qui peut par conséquent être placé arbitrairement dans l'espace ;

- au voisinage du point singulier, la solution est en $1/\sqrt{G_{ik}(\alpha^j)} d\xi^i d\xi^k$, donc, si on prend pour hypersurface $\lambda = 0$ une hypersurface $t = \text{Cte}$, en $1/r$ dans l'espace euclidien.

Une telle solution singulière de (38) étant donnée dans l'espace des ξ^i , l'équation de continuité en déduit une solution singulière de l'équation (E) dont la singularité se déplace le long de la ligne de guidage issue du point α^k . En outre, toujours en raison de l'équation de continuité, cette solution garde une partie principale en $1/r$ pendant son évolution. D'après les résultats du chapitre III, cette solution a donc la forme générale trouvée pour les solutions singulières ponctuelles dans ce chapitre. Enfin, comme la phase de la solution singulière ne sera autre que φ , l'équation intégrale (9) en Ω sera sûrement vérifiée.

On peut interpréter les équations (12) en revenant au système de coordonnées initial. Nous nous intéresserons seulement aux 6 premières de ces équations :

$$(39) \quad \frac{\partial G^{ik}}{\partial \lambda} = \mathcal{K} G^{ik}$$

Le système initial de coordonnées étant supposé donné, on peut prendre $\lambda = 0$ sur la surface $t = 0$, puis choisir les ξ^k de telle sorte que l'on ait, pour $t = 0$:

$$x^i(\xi^k, 0) = \xi^i$$

quelles que soient les valeurs des ξ^i .

Au voisinage de $\lambda = 0$ les coordonnées x^p s'écrivent :

$$x^k = \xi^k + \lambda u_0^k + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\partial u^k}{\partial \lambda} \right)_0 \quad t = \lambda u_0^4 + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\partial u^4}{\partial \lambda} \right)_0$$

l'indice zéro signifiant que les quantités qui en sont affectées sont prise pour $\lambda = 0$ et ne sont fonction que des ξ^k . Nous supprimerons dans ce qui suit l'indice zéro, en notant toutefois ce caractère.

On déduit des équations précédentes, en nous limitant aux termes du premier ordre en λ , les formules de transformation au voisinage de $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} &= \delta_{ik} + \lambda \frac{\partial u^i}{\partial \xi^k} & ; & & \frac{\partial x^i}{\partial \lambda} &= u^i + \lambda \frac{\partial u^i}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial t}{\partial \xi^k} &= \lambda \frac{\partial u^4}{\partial \xi^k} & & & \frac{\partial t}{\partial \lambda} &= u^4 + \lambda \frac{\partial u^4}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire donne les formules de transformation inverse, où on fait apparaître les vitesses $v^k = \frac{u^k}{u^4}$ (toujours pour $\lambda = 0$), et qui sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} &= \delta_{ik} - \lambda u^4 \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} & \frac{\partial \xi^i}{\partial t} &= -v^i - \lambda \left(\frac{\partial v^i}{\partial \lambda} - u^k \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} \right) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} &= -\frac{\lambda}{u^4} \frac{\partial u^4}{\partial \xi^k} & \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= \frac{1}{u^4} + \frac{\lambda}{u^4} \left(v^k \frac{\partial u^4}{\partial \xi^k} - \frac{1}{u^4} \frac{\partial u^4}{\partial \lambda} \right)\end{aligned}$$

Dans tous les termes du premier ordre en λ on peut, en raison même de ces formules, remplacer la dérivation $\frac{\partial}{\partial \xi^k}$ par la dérivation $\frac{\partial}{\partial x^k}$, et la dérivation $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ par la dérivation $u^4 \frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Les formules de transformation s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} &= \delta_{ik} - \lambda u^4 \frac{\partial v^i}{\partial x^k} & \frac{\partial \xi^i}{\partial t} &= -v^i - \lambda u^4 \frac{\partial v^i}{\partial t} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} &= -\frac{\lambda}{u^4} \frac{\partial u^4}{\partial x^k} & \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= \frac{1}{u^4} - \frac{\lambda}{u^4} \frac{\partial u^4}{\partial t}\end{aligned}$$

Introduisons ces formules dans le changement de composantes des G^{ik} :

$$G^{ik} = g^{\rho\sigma} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \frac{\partial \xi^k}{\partial t}$$

nous obtenons :

$$G^{ik} = \delta_{ik} - \frac{v^i v^k}{c^2} - \lambda u^4 \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial (v^i v^k)}{\partial t} \right]$$

Les équations (39) s'écrivent alors :

$$(40) \quad u^4 \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial (v^i v^k)}{\partial t} \right] + \mathcal{K} \left(\delta_{ik} - \frac{v^i v^k}{c^2} \right) = 0$$

Les coordonnées ξ^p n'apparaissant plus dans ces équations, il est évident qu'elles sont valables en tout point de l'espace-temps.

Il est possible de calculer le multiplicateur $\mathcal{K}$ en fonction de quantités remarquables. La multiplication contractée des équations (40) par $\frac{v^i v^k}{c^2}$ donne en effet :

$$\frac{u^4}{v^2} \left[\frac{dv^2}{dt} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial v^2}{\partial t} \right] + \mathcal{K} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0$$

D'autre part, en faisant $i = k$ dans les équations (40) et en contractant on obtient :

$$(41) \quad u^4 \left(2 \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v^2}{\partial t} \right) + \mathcal{K} \left(3 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0$$

En éliminant $\frac{\partial v^2}{\partial t}$ entre les deux équations précédentes on obtient :

$$u^4 \left(\frac{1}{c^2 - v^2} \frac{dv^2}{dt} + 2 \frac{\partial v^k}{\partial x^k} \right) + 3\mathcal{K} = 0$$

Si f est une quelconque des fonctions pouvant servir d'amplitude à la phase φ donnée, on peut remplacer $\frac{\partial v^k}{\partial x^k}$ par $-\frac{1}{f^2 u^4} \frac{d}{dt} (f^2 u^4)$, et on obtient pour $\mathcal{K}$ la valeur :

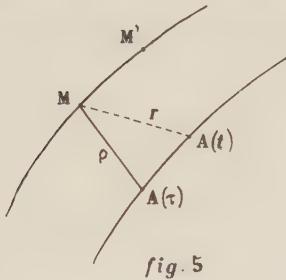
$$\mathcal{K} = \frac{u^4}{3} \frac{d}{dt} \log \left[(c^2 - v^2) (f^2 u^4)^2 \right]$$

ou encore :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} \log \left[(c^2 - v^2) (f^2 u^4)^2 \right]$$

Cette équation nous sera utile plus loin.

10bis. - DETERMINATION DE LA FONCTION Ω .



Considérons un point $M(x^k)$ voisin, à l'instant t , du point singulier $A(t)$ et la ligne de guidage passant par M . Considérons, à l'instant $t + \delta t$, le point M' déduit de M par le déplacement $\delta \mathbf{M} = \mathbf{v}(\mathbf{M}, t) \cdot \delta t$. Le point $A(\tau)$ correspondant à M se déplace en $A(\tau + \delta \tau)$ avec :

$$\delta \tau = \frac{\partial \tau}{\partial x^p} \delta x^p = - \frac{x^k - a^k}{D} v^k(\mathbf{M}, t) + \frac{c \rho}{D} \delta t$$

On a d'autre part, à des infiniment petits près d'ordre 2 en $x^k - a^k(t)$:

$$v^k(\mathbf{M}, t) = v^k(\tau) + \frac{\partial v^k}{\partial t} (t - \tau) + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} (x^j - a^j)$$

$\frac{\partial v^k}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial v^k}{\partial t}$ pouvant être pris indifféremment en $A(\tau)$ ou $A(t)$. On en déduit :

$$(42) \quad \frac{\delta \tau}{\delta t} = 1 - \frac{x^k - a^k}{D} \rho \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial v^k}{\partial t} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \frac{x^i - a^i}{\rho} \right)$$

la différence $\frac{\delta \tau}{\delta t} - 1$ étant infiniment petite de l'ordre de ρ , ou encore de $A_M \mathbf{M}$.

Calculons maintenant la quantité $\frac{1}{D} \frac{\delta D}{\delta t}$. On a :

$$\frac{1}{D} \frac{\delta D}{\delta t} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial x^k} v^k(\mathbf{M}, t) + \frac{dD}{d\tau} \frac{\delta \tau}{\delta t}$$

En développant $v^k(M, t)$ comme il vient d'être fait, en remplaçant $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^k}$, $\frac{d\mathbf{D}}{dt}$ et $\frac{\delta \varphi}{\delta t}$ par leurs valeurs, et en limitant le développement aux infiniment petits d'ordre 1 en ρ , on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{D}} \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t} = (c^2 - v^2) \frac{x^i - \alpha^i}{\mathbf{D}} \frac{x^k - \alpha^k}{\mathbf{D}} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{x^i - \alpha^i}{\mathbf{D}} \left(v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^k \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right) \\ - \frac{1}{c(c - v_p)} \left[(c v_p - v^2) \frac{x^k - \alpha^k}{\mathbf{D}} - v^k \right] \frac{\partial v^k}{\delta t} \end{aligned}$$

En règle générale, cette expression dépend essentiellement de la direction suivant laquelle M se rapproche de $A(t)$. Nous allons voir qu'il n'en est plus ainsi lorsque les équations (40) qui sont, comme nous le savons, une condition suffisante de polyvalence de la phase φ , sont vérifiées. Il suffit en effet de multiplier ces équations (40) par

$$(c^2 - v^2) \frac{(x^k - \alpha^k)(x^i - \alpha^i)}{2 \mathbf{D}^2} - v^k \frac{x^i - \alpha^i}{\mathbf{D}}$$

et de contracter. On trouve :

$$\left[(c^2 - v^2) \frac{(x^k - \alpha^k)(x^i - \alpha^i)}{2 \mathbf{D}^2} - v^k \frac{x^i - \alpha^i}{\mathbf{D}} \right] \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial (v^i v^k)}{\delta t} \right] + \frac{\mathcal{H}}{2u^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (c^2 - v^2) \frac{x^k - \alpha^k}{\mathbf{D}} \frac{x^i - \alpha^i}{\mathbf{D}} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{x^i - \alpha^i}{\mathbf{D}} v^k \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right) = - \frac{\mathcal{H}}{2u^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ - \frac{c v_p - v^2}{c(c - v_p)} \frac{x^k - \alpha^k}{\mathbf{D}} \frac{\partial v^k}{\delta t} + \frac{v_p}{c^2(c - v_p)} v^k \frac{\partial v^k}{\delta t} \end{aligned}$$

En comparant avec l'équation trouvée ci-dessus pour $\frac{1}{\mathbf{D}} \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t}$, on voit qu'il en résulte :

$$(43) \quad \frac{1}{\mathbf{D}} \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t} = - \frac{\mathcal{H}}{2u^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} v^k \frac{\partial v^k}{\delta t}$$

expression indépendante de la direction $A_t M$

Calculons maintenant la variation de l'amplitude de la fonction singulière $u(M, t)$ lorsqu'on passe du point M, t au point $M', t + \delta t$ situé sur la ligne de guidage passant par M, t . Dans la formule du chapitre IV, par. 3bis, qui donne u, ω, U, D, H varient de $\delta \omega, \delta U, \delta D, \delta H$, et on a :

$$\delta u = \frac{U \delta \omega}{D} + \frac{\omega \delta U}{D} - \frac{\omega U}{D^2} \delta D - 2 \delta H$$

Formons alors $\frac{\delta u}{u}$. On obtient en passant à la limite pour $D = 0$, c'est-à-dire pour M tendant vers $A(t)$:

$$\lim \left[\frac{\delta u}{u} + \frac{\omega \mathbf{U}}{D(\omega \mathbf{U} - 2 \mathbf{H} D)} \delta D \right] = \lim \left(\frac{\delta \omega}{\omega} + \frac{\delta \mathbf{U}}{\mathbf{U}} \right)$$

On fait la même opération sur u^* et on ajoute membre à membre. $\frac{\delta u}{u} + \frac{\delta u^*}{u^*}$ est égal à $2 \frac{\delta f}{f}$. Examinons la valeur de toutes les quantités réelles.

La quantité

$$\left[\frac{\omega \mathbf{U}}{D(\omega \mathbf{U} - 2 \mathbf{H} D)} - \frac{\omega^* \mathbf{U}^*}{D(\omega^* \mathbf{U}^* - 2 \mathbf{H}^* D)} \right] \frac{\delta D}{\delta t}$$

tend, pour D tendant vers zéro, vers $\lim \frac{2}{D} \frac{\delta D}{\delta t}$, comme on peut s'en rendre compte par un développement de la quantité entre crochets.

La quantité $\left(\frac{\delta \omega}{\omega} + \frac{\delta \omega^*}{\omega^*} \right) \frac{1}{\delta t}$ tend vers :

$$\frac{2}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} \lim \frac{\delta \tau}{\delta t} = \frac{2}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt}$$

Enfin la quantité $\frac{1}{\mathbf{U}} \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta t}$ s'écrit :

$$\frac{1}{\mathbf{U}(x^\sigma, a^\sigma)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^k} v^k(M, t) + \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta t} + \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a^i} v^i(\tau) + \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta \tau} \right] \frac{\delta \tau}{\delta t} \right\}$$

D'après les égalités (22) et (23) du chapitre II et l'équation (42) de ce chapitre, $\frac{1}{\mathbf{U}} \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta t}$ tend vers zéro avec D .

On a en définitive, à la limite :

$$(44) \quad \lim \left(\frac{1}{f} \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{D} \frac{\delta D}{\delta t} \right) = \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt}$$

Enfin l'équation de continuité permet d'évaluer $\frac{1}{f} \frac{\delta f}{\delta t}$. De l'équation (7) résulte en effet :

$$\frac{1}{f} \frac{\delta f}{\delta t} = - \frac{1}{2 u^4} \frac{du^4}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial v^k}{\partial x^k}$$

La comparaison de cette équation, et des équations (43) et (44) donne :

$$\frac{2}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = - \left[\frac{\partial v^k}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{1}{u^4} \frac{du^4}{dt} + \frac{\mathcal{H}}{u^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right]$$

Le second membre peut être transformé en une expression directement intégrable. Ajoutons membre à membre l'équation précédente et l'équation (41) divisée par u^4 . Nous obtenons :

$$(45) \quad \frac{2}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{2\mathcal{M}}{u^4} + \frac{\partial v^k}{\partial x^k} - \frac{1}{u^4} \frac{du^4}{dt}$$

ou encore, en reprenant la valeur de $\mathcal{M}$ donnée par l'avant-dernière équation du par. 9bis et la valeur $-\frac{1}{f^2 u^4} \frac{d}{dt} (f^2 u^4)$ de $\frac{\partial v^k}{\partial x^k}$:

$$(14) \quad \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \log \frac{(c^2 - v^2)f}{u^4}$$

11bis. - PHASE POLYVALENTE DE L'EQUATION NON LINEAIRE

Reprenons maintenant l'équation (N) et cherchons s'il est possible de trouver pour elle une phase polyvalente. Pour ce faire on recommencera sur l'équation (N) le changement de coordonnées qu'on a effectué au par. 9bis sur l'équation (E) ; on retrouvera l'équation (36) modifiée par l'adjonction de la quantité $\frac{4\pi}{c} \Omega f^2 u^4$ au premier membre. Si on substitue dans cette nouvelle équation f_0 à f et qu'on divise par F , on obtient, à la place de l'équation (38), l'équation :

$$g^{ik} \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^i \partial \xi^k} + 2H^k \frac{\partial f_0}{\partial \xi^k} + Jf_0 + \frac{4\pi}{c} \Omega f f_0 u^4 = 0$$

Pour que la phase φ soit polyvalente, il suffit que les conditions (12) soient remplies, et que soit remplie la condition supplémentaire :

$$(46) \quad \frac{1}{\Omega f f_0 u^4} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\Omega f f_0 u^4) = \mathcal{M}$$

Or f_0 , ne dépendant pas de λ , disparaît de cette équation. D'autre part, on déduit de l'équation de continuité (7) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f u^4} \frac{d}{dt} (f u^4) &= \frac{1}{f \sqrt{u^4}} \frac{d}{dt} (f \sqrt{u^4}) + \frac{1}{\sqrt{u^4}} \frac{d}{dt} \sqrt{u^4} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial v^k}{\partial x^k} + \frac{1}{2 u^4} \frac{du^4}{dt} \end{aligned}$$

et l'équation (46) s'écrit, compte tenu de ce que $u^4 = \frac{dt}{d\lambda}$:

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial v^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2 u^4} \frac{du^4}{dt} + \frac{\mathcal{M}}{u^4}$$

qui n'est autre que l'équation (45), supposée remplie comme forme différentielle de la condition (9).

BIBLIOGRAPHIE

- i. - A. LICHNEROWICZ. - Thèse, Paris, 1939
- ii. - T. TAKABAYASI. - Prog. Théor. Phys. - 1952, p. 143 & 1953, p. 187

ERRATA

- Page 1. - Dernière ligne, au lieu de "substituer" lire "subsister".
- Page 19. - Equation (11), ajouter $2 \frac{\beta^\sigma}{f} \frac{\delta f}{\delta x^\sigma}$ au second membre.
- Page 36. - Ligne 11, au lieu de "sur" lire "que".
- Page 47. - Ligne 1, au lieu de "comme elle", lire "comme celle".
- Page 52. - Equation (18), 3ème terme, au lieu de $u \frac{du}{dv}$ lire $u \frac{dV}{dv}$.
- Page 55. - Ligne 4 à partir du bas, au lieu de ω lire ωU .
- Page 60. - Ligne 13, au lieu de "suivant M" lire "suivant laquelle M".
- Page 62. - Ligne 16 à partir du bas, supprimer l'indice σ qui affecte Ω
- Page 74. - Ligne 6 à partir du bas, au lieu de "déduit" lire "réduit".
- Page 76. - Ligne 13, au lieu de "pās" lire "par".
- Page 85. - Ligne 5 à partir du bas, au lieu de "écrite" lire "décrite".
- Page 93. - Ligne 4, au lieu de $\frac{dD}{dt}$ lire $\frac{dD}{dx^k}$.
- Page 107. - Ligne 24, après "équation en" ajouter f .
- Page 124. - Ligne 14, après "Intéressons" ajouter "nous".
- Page 125. - Ligne 4 à partir du bas, au lieu de "par. 3" lire "par. 1"
Dernière équation, dernier terme, supprimer ν
- Page 131. - Deuxième équation, second membre, au lieu de $\frac{dD}{dx^k}$, lire $\frac{\delta D}{\delta x^k}$.
- Page 132. - 3ème équation, 1re intégrale, le domaine est ω' et non ω .

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	
Chap. I. - LES POTENTIELS DE LIGNE.....	19
1. Généralités	19
2. Définition du potentiel de ligne	20
3. Dérivées de la fonction τ	21 & 27
4. Régularité de la fonction u	22
5. Conditions pour que u vérifie l'équation (E).....	23 & 28
6. Calcul de la partie principale de u au voisinage de Γ	23 & 29
7. Condition à imposer à μ pour localiser la singularité.....	25
Chap. II. - DETERMINATION DE LA FONCTION μ	35
1. Résultat fondamental.....	35 & 41
2. Localisation de la singularité. Singularité ponctuelle	36 & 55
3. Calcul des dérivées partielles de U	37 & 56
4. Equation $\square u = 0$	37 & 58
5. Equation $\square u - \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c_0^2 u = 0$	38 & 58
6. Questions de convergence	39
Chap. III. - FORME GENERALE DES SOLUTIONS SINGULIERES	60
Chap. IV. - FORMULE DU GUIDAGE, APPLICATIONS	83
1. Définition des lignes de guidage	83
2. Démonstration générale de la formule du guidage pour les solutions singulières	84
3. Singularité ponctuelle. Phase et guidage	85 & 90
4. Résolution de l'équation intégrale (6)	86 & 96
5. Application des singularités ponctuelles : interférences par quantas isolés	87 & 99
6. Singularité linéaire. Phase et guidage	88 & 101
Chap. V. - RACCORD ENTRE LES SOLUTIONS SINGULIERES ET LES SOLUTIONS REGULIERES. PASSAGE A UNE EQUATION NON LINEAIRE	105
1. Généralités	105
2. Les lignes de guidage sont des lignes de raccord	107 & 120
3. Extension à un type d'équations non linéaires	108 & 123
4. Interprétation physique des conditions de raccord	109 & 123
5. Examen des caractéristiques de l'équation de Jacobi	111 & 124
6. Placage d'une solution singulière sur une solution régulière	111 & 125
7. Construction d'une fonction régulière approchant une so- lution singulière de (E)	112 & 126
8. Formation d'une équation non linéaire et théorème de raccord	114 & 133
9. Solutions à phase polyvalente	116 & 135
10. Détermination de la fonction Ω	118 & 141
11. Phase polyvalente de l'équation non linéaire	118 & 144

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

«Extraction du faisceau par déviation magnétique
dans les synchro cyclotrons».

Vu et approuvé :

Paris, le 11 mai 1956

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PERES

Vu

et Permis d'imprimer :

**Le Recteur de l'Académie
de Paris,**

Jean SARRAILH



ACHEVE D'IMPRIMER
AU BUREAU DE DOCUMENTATION MINIERE
EN MARS 1957

